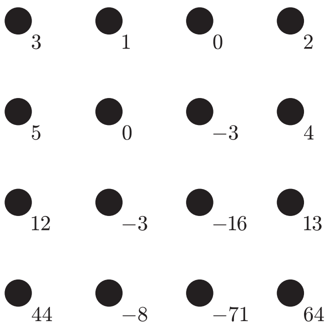
O twierdzeniu Kreina–Milmana

Łukasz GRABOWSKI[*]

Jak brzmi zadanie?



Rys. 1. Fragment kraty Gaussa wraz z wartościami pewnej funkcji harmonicznej.

Przez kratę Gaussa rozumiemy zbiór punktów na płaszczyźnie o obu współrzędnych całkowitych. Punkty kraty Gaussa będziemy zapisywać jako pary współrzędnych (np. (a,b) lub $(2,4)$).

Przez funkcję harmoniczną rozumiemy funkcję rzeczywistą f określoną na punktach kraty Gaussa, która posiada następującą własność: dla każdego punktu (a,b) kraty Gaussa zachodzi

$$(*) \qquad f(a,b) = \frac{f(a+1,b)+f(a-1,b)+f(a,b-1)+f(a,b+1)}{4}.$$

Innymi słowy, wartość funkcji f w danym punkcie jest średnią arytmetyczną wartości funkcji f w punktach sąsiednich.

Nazwa „funkcja harmoniczna” nie jest związana z tematem artykułu, a pochodzi stąd, że funkcje o powyższej własności pojawiają się, gdy bada się od strony matematycznej rozkład dźwięku (np. akordu gitarowego) na harmoniki (czyli najprostsze, pojedyncze dźwięki).

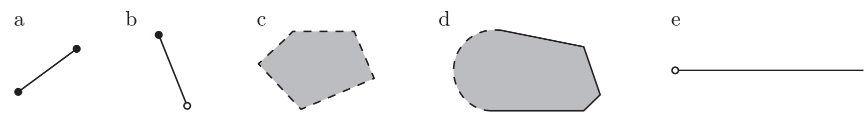
Zadanie 1. *Niech f będzie funkcją harmoniczną o wartościach ograniczonych przez 1 i -1. Dowieść, że f jest funkcją stałą.*

Zadanie to da się (podobno) rozwiązać „klasycznymi” metodami, tzn. poprzez pracowitą, ale „szkolną”, analizę własności funkcji f. Istnieje jednak rozwiązanie, które da się powiedzieć i zrozumieć w 20 sekund, ale które jest „nieszkolne”: polega na analizie własności zbioru *wszystkich* funkcji harmonicznych. Żeby się z nim zapoznać, trzeba najpierw przyswoić sobie kilka nietrudnych pojęć.

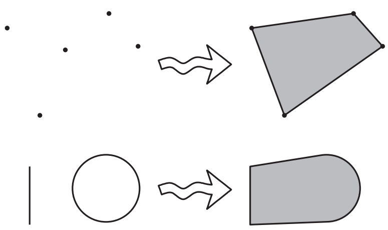
Kilka nietrudnych pojęć i pozornie niezwiązane z poprzednim zadanie

Musimy niestety operować wysokowymiarowymi przestrzeniami euklidesowymi, tzn. uogólnieniami zwykłej płaszczyzny oraz zwykłej przestrzeni trójwymiarowej. Będziemy zajmować się przestrzenią n-wymiarową $\mathbb{R}^n$, gdzie n jest pewną liczbą naturalną. Jeżeli Czytelnik nie ma obycia z takimi przestrzeniami, to powinien mieć przed oczyma płaszczyznę i przestrzeń trójwymiarową. Punkty przestrzeni $\mathbb{R}^n$ to „n-tki” liczb $(a_1,\ldots,a_n)$; będziemy je oznaczać wektorowo, np. $\vec{p}$, $\vec{q}$.

Podzbiór przestrzeni n-wymiarowej $A\subset\mathbb{R}^n$ nazywa się *wypukłym*, jeżeli wraz z każdymi swoimi dwoma punktami zawiera również odcinek je łączący.



Rys. 2. Przykłady zbiorów wypukłych: a) odcinek obustronnie domknięty, b) odcinek otwarto-domknięty, c) wielokąt bez brzegu, d) zbiór, którego brzeg tylko częściowo do niego należy, e) otwarta półprosta.



Rys. 3. Dwa przykłady operacji brania otoczki wypukłej zbioru.

Zostawiamy Czytelnikowi rozwiązanie następującego zadania.

Zadanie 2. *Przekrój dowolnie wielu zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.*

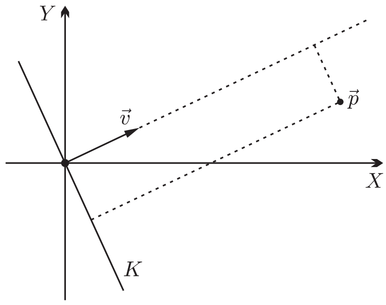
Punktem *ekstremalnym* zbioru wypukłego $A\subset\mathbb{R}^n$ nazywamy taki punkt $\vec{p}\in A$, który nie leży *wewnątrz* żadnego odcinka o końcach w A. Zbiór wszystkich punktów ekstremalnych zbioru A oznaczamy $\mathrm{Ext}(A)$. Zbiór wypukły może nie mieć punktów ekstremalnych (rys. 2c i 2e), może ich mieć kilka (rys. 2a, 2b i 2d) lub mnóstwo (na przykład koło wraz ze swoim brzegiem). *Otoczka wypukła* danego, niekoniecznie wypukłego, zbioru $B\subset\mathbb{R}^n$ to najmniejszy (w sensie zawierania zbiorów) zbiór wypukły, który zawiera B. Otoczkę wypukłą zbioru B oznaczamy $\mathrm{Conv}(B)$ (od ang. *convex*, czyli wypukły).

[*]student, Uniwersytet Szczeciński

Jesteśmy zainteresowani pytaniem „kiedy otoczka wypukła zbioru punktów ekstremalnych zbioru wypukłego A jest równa A?" (czyli „kiedy $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A)) = A$?"). Przykłady pokazują, że nie dla wszystkich zbiorów wypukłych A tak jest (w przypadku otwartej półprostej i koła bez brzegu otoczka zbioru punktów ekstremalnych jest zbiorem pustym; w przypadku domkniętej półprostej otoczka zbioru punktów ekstremalnych jest jednym punktem). Sugerują też, że być może da się rozwiązać takie zadanie.

Zadanie 3 [Mark Krein, David Milman, 1940]. *Załóżmy, że podzbiór A przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest wypukły, domknięty i ograniczony. Wykazać, że wówczas* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ *jest równe A.*

Intuicyjnie, patrząc na poprzednie przykłady, wiadomo, co to znaczy, że zbiór jest domknięty. Ściślej, dany zbiór $B \subset \mathbb{R}^n$ jest domknięty, gdy spełniona jest następująca własność: jeżeli $\{\vec{b_i}\}_{i=1}^{\infty}$ jest ciągiem punktów B, który zbiega do pewnego punktu $\vec{g}$ w $\mathbb{R}^n$, to również $\vec{g} \in B$. Na rys. 2e łatwo wskazać ciąg, którego wszystkie elementy zawarte są w otwartej półprostej, ale którego granica już do niej nie należy, bo jest „brakującym" końcem. W przypadku obustronnie domkniętego odcinka nie da się wskazać podobnego ciągu.



Rys. 4. Geometryczna interpretacja funkcji liniowej $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Zanim przejdziemy do rozwiązania zadania 3 potrzebujemy jeszcze jednego pojęcia: funkcja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazywa się *liniowa*, jeśli dla każdych dwóch punktów $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $F(\vec{p} + \vec{q}) = F(\vec{p}) + F(\vec{q})$ oraz dla każdej liczby rzeczywistej α zachodzi $F(\alpha\vec{p}) = \alpha F(\vec{p})$. Geometrycznie o niezerowej funkcji liniowej można myśleć, że jest to wybór pewnej podprzestrzeni $(n-1)$-wymiarowej K, na której funkcja się zeruje i prostopadłego do niej wektora $\vec{v}$, wzdłuż którego funkcja rośnie i na którym funkcja przyjmuje wartość 1. Jest jasne, że każdy inny punkt $\vec{p}$ jest sumą wielokrotności wybranego wektora, powiedzmy $\alpha\vec{v}$, i jakiegoś wektora wyróżnionej podprzestrzeni, powiedzmy $\vec{k} \in K$, więc wartość $F(\vec{p})$ jest jednoznacznie wyznaczona (rys. 4):

$$F(\vec{p}) = F(\vec{k}) + F(\alpha\vec{v}) = 0 + \alpha F(\vec{v}) = \alpha.$$

Funkcje liniowe są dla nas ważne ze względu na następujące dwa zadania, które Czytelnik może samodzielnie rozwiązać (w tym celu dobrze jest zrobić rysunki).

Zadanie 4. *Niech dana będzie funkcja liniowa $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i niech $r \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$F^{-1}(r) := \{\vec{p} \in \mathbb{R}^n : F(\vec{p}) = r\}$$

jest zbiorem wypukłym i domkniętym (ten zbiór to w rzeczy samej podprzestrzeń $(n-1)$-wymiarowa, jeśli tylko funkcja F nie jest funkcją zerową).

Zadanie 5. *Niech dana będzie funkcja liniowa $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i niech $r \in \mathbb{R}$. Ponadto niech w $\mathbb{R}^n$ dany będzie zbiór wypukły A. Załóżmy, że F przyjmuje wartość r w pewnym punkcie zbioru A oraz nie przyjmuje wartości większej niż r w żadnym punkcie zbioru A. Rozważmy zbiór $A \cap F^{-1}(r)$. Zbiór ten jest wypukły ze względu na zadanie poprzednie i zadanie 2. Dowieść, że każdy punkt ekstremalny tego zbioru jest także punktem ekstremalnym zbioru A.*

Rozwiązanie zadania 3. Wpierw zauważmy, że zbiór A spełniający warunki zadania ma przynajmniej jeden punkt ekstremalny. Dowiedziemy tego przez indukcję ze względu na wymiar przestrzeni, w której znajduje się A. Jeżeli $A \subset \mathbb{R}^1$, tzn. A leży na prostej, to w A jest element najmniejszy i największy, i są one punktami ekstremalnymi (Czytelnik powinien uzasadnić, jak z założeń o zbiorze A wynika, że ma on element najmniejszy i największy – wszak łatwo podać przykłady zbiorów na prostej, które nie mają takich elementów).

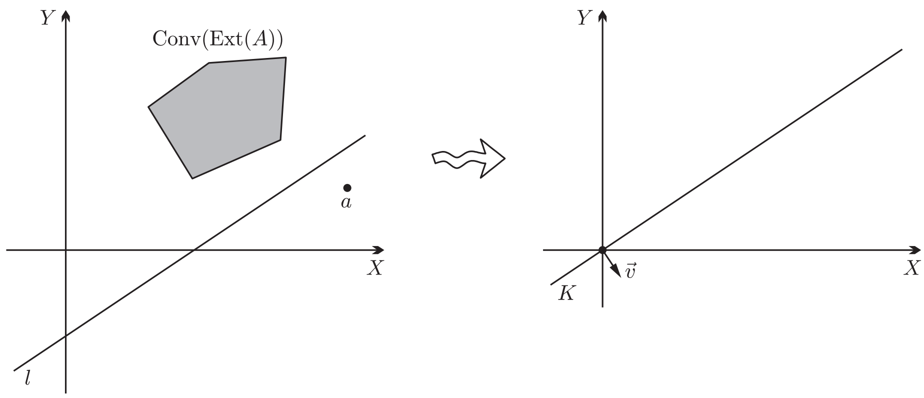
Załóżmy prawdziwość tezy dla $n-1$. Weźmy dowolną funkcję liniową $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i załóżmy, że maksimum tej funkcji na zbiorze A to $r \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że zbiór $A \cap F^{-1}(r)$ również jest ograniczony, wypukły i domknięty. Z drugiej strony, $F^{-1}(r)$ to przestrzeń $(n-1)$-wymiarowa, a zatem z założenia indukcyjnego wynika, że $A \cap F^{-1}(r)$ ma przynajmniej jeden punkt ekstremalny. Z poprzedniego zadania mamy, że taki punkt jest punktem ekstremalnym dla całego A.

To, że F osiąga maksimum na zbiorze A jest intuicyjnie jasne i wynika z tego, że A jest ograniczony i domknięty. Czytelnik może sprawdzić, że oba te założenia są istotne – w przeciwnym przypadku funkcja F nie musiałaby osiągać maksimum na zbiorze A.

Przystępujemy do właściwego rozwiązania. Załóżmy nie wprost, że $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A)) \neq A$, zatem istnieje punkt $a \in A$, który jest poza $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$. Zauważmy co następuje.

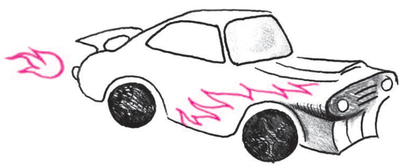
Fakt 1. *Jest intuicyjnie jasne, że istnieje funkcja liniowa F, która w a przyjmuje wartość większą niż w jakimkolwiek punkcie* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$.

Powiedzmy dla przykładu, że A jest podzbiorem płaszczyzny; skoro a nie należy do $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$, to można oddzielić a od $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ jakąś prostą l (to jest prawda, co wynika z wypukłości $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$, ale powinno się to ściślej uzasadnić). Odpowiednią funkcję liniową F definiujemy, wybierając prostą równoległą do l przechodzącą przez początek układu współrzędnych jako K i wektor prostopadły łączący prostą l z punktem a jako wektor $\vec{v}$ (rys. 5).



Rys. 5. Konstrukcja funkcji liniowej, która „oddziela" $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ od a.

Niech r będzie maksymalną wartością, jaką F przyjmuje na zbiorze A. Tak jak poprzednio, $A \cap F^{-1}(r)$ jest zbiorem wypukłym, ograniczonym i domkniętym, zatem ma, co wiemy z poprzedniego paragrafu, punkt ekstremalny, który jest punktem ekstremalnym dla całego zbioru A (co wiemy z poprzedniego zadania). Ale powyższy fakt implikuje, że $F^{-1}(r) \cap \mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A)) = \emptyset$, co prowadzi do sprzeczności, bo pokazaliśmy istnienie punktu ekstremalnego w A, który nie jest elementem $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$.



Odcinek w $\mathbb{R}^\infty$ łączący punkty $a = (a_1, a_2, \ldots)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots)$ definiujemy analogicznie jak w przestrzeniach skończenie wymiarowych jako zbiór punktów postaci $ta + (1-t)b$ dla $t \in [0,1]$.

Tuningowana wersja zadania Kreina–Milmana

By rozwiązać zadanie o funkcjach harmonicznych, musimy rozważać nieskończenie wymiarową przestrzeń $\mathbb{R}^\infty$, której elementy to nieskończone ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \ldots)$. Przestrzeń ta jest, pod względem formalnym, bardzo podobna do przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które rozważaliśmy powyżej. Definicja wypukłości jest dokładnie taka sama jak w przypadku skończenie wymiarowym. Ograniczoność podzbiorów – własność, której nie definiowaliśmy w przypadku skończenie wymiarowym, bo była intuicyjnie oczywista – definiuje się następująco: podzbiór $B \subset \mathbb{R}^\infty$ nazywamy ograniczonym, jeżeli jego obraz przy rzutowaniu na dowolną oś jest ograniczony (rzutowanie na, powiedzmy, piątą oś to odwzorowanie $\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, które punktowi $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ przyporządkowuje współrzędną a_5). Definicja domkniętości podzbioru również przenosi się bez zmian (choć trzeba wiedzieć, co to znaczy, że ciąg zbiega do jakiejś granicy – tak jak w przypadku ograniczoności definiujemy to „po współrzędnych": ciąg $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiega do punktu g wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg rzutowań na dowolną oś zbiega do rzutowania g).

Zachodzi też twierdzenie analogiczne do zadania 3.

Twierdzenie (Krein, Milman). *Załóżmy, że $A \subset \mathbb{R}^\infty$ jest wypukły, domknięty i ograniczony. Wówczas domknięcie zbioru* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ *jest równe A.*

Domknięcie zbioru B definiuje się – zgodnie z intuicją – przez dołączenie do B granic wszystkich ciągów, których elementy należą do B. Twierdzenia dowodzi się tak samo jak skończenie wymiarowego zadania powyżej, z jednym wyjątkiem:

fakt 1 nie jest już intuicyjnie jasny (wszak nie możemy rysować nieskończenie wymiarowych obrazków). Jest on wręcz nieprawdziwy (choć autor nie zna przykładu to potwierdzającego) i stąd bierze się różnica w sformułowaniu twierdzenia – w nieskończenie wymiarowym przypadku twierdzimy, że *domknięcie* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ jest równe A. Zatem odpowiedni paragraf dowodu będzie teraz wyglądał tak.

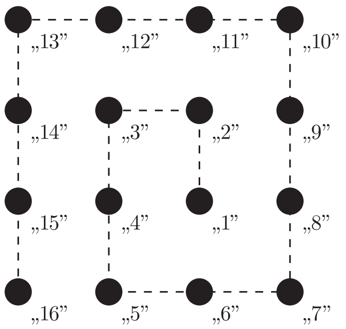
„Przystępujemy do właściwego rozwiązania. Załóżmy nie wprost, że domknięcie zbioru $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$ nie jest równe A, zatem istnieje punkt $a \in A$, który jest poza domknięciem $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$. Zauważmy co następuje.

Fakt 2. *Nie jest intuicyjnie jasne, ale jest prawdziwe, że istnieje funkcja liniowa F, która w a przyjmuje wartość większą niż w jakimkolwiek punkcie domknięcia* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Ext}(A))$.”

Reszta przechodzi bez zmian (z wyjątkiem indukcji matematycznej, którą trzeba zastąpić „indukcją pozaskończoną” – ale to jest tylko drobiażdżek).

Wisienka

Chcemy patrzeć na funkcję określoną na kracie Gaussa jak na element przestrzeni $\mathbb{R}^\infty$. W tym celu numerujemy liczbami naturalnymi elementy kraty Gaussa (rys. 6). To daje nam pożądane utożsamienie: funkcja f określona na kracie Gaussa to punkt w $\mathbb{R}^\infty$ o współrzędnych $(f(„1”), f(„2”), f(„3”), \ldots)$. Przy tym utożsamieniu zbiorowi funkcji harmonicznych ograniczonych przez 1 i -1 odpowiada jakiś zbiór A.



Rys. 6. Fragment kraty Gaussa wraz z przykładowym, „wężowym” ponumerowaniem punktów liczbami naturalnymi.

Zadanie 6. *Zbiór A jest wypukły.*

Wprost z określenia wynika, że A jest ograniczony (bo na każdej osi jest ograniczony przez 1 i -1). Łatwo też rozwiązać kolejne zadanie.

Zadanie 7. *Zbiór A jest domknięty.*

Trzeba sprawdzić, że jeżeli ciąg funkcji – czyli punktów zbioru A – jest harmoniczny i ograniczony przez 1 i -1, to jego granica też jest harmoniczna i ograniczona przez 1 i -1. Czytelnik powinien zastanawiać się nad tym tak długo, aż będzie to, przynajmniej intuicyjnie, jasne jak Słońce.

Zatem do zbioru A możemy zastosować twierdzenie Kreina–Milmana, by wywnioskować, że A jest domknięciem otoczki wypukłej zbioru swych punktów ekstremalnych. Dla zakończenia rozwiązania wystarczy rozwiązać następujące zadanie.

Zadanie 8. *W zbiorze A są tylko dwa punkty ekstremalne. Jeden odpowiada funkcji stale równej 1, a drugi funkcji stale równej -1.*

Rzeczywiście, równanie $(*)$ definiujące funkcje harmoniczne pokazuje, że f leży wewnątrz odcinka o końcach odpowiadających funkcjom s i t, gdzie

$$s(a,b) = \frac{f(a+1,b) + f(a-1,b) + f(a,b-1)}{3}, \qquad t(a,b) = f(a,b+1),$$

bo

$$f = \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}t.$$

Jeśli f nie jest stała, to bez straty ogólności możemy założyć, że $f(0,0) \neq f(0,1)$, stąd funkcja t nie jest równa funkcji f, a stąd dostajemy, że f nie jest punktem ekstremalnym. Z drugiej strony zauważamy, że jeżeli f jest funkcją stałą i jednocześnie punktem ekstremalnym, to musi być wszędzie równa 1 albo wszędzie równa -1.

To kończy rozwiązanie zadania, od którego wyszliśmy: wiemy, że zbiór wszystkich funkcji harmonicznych jest domknięciem otoczki wypukłej dwóch funkcji stałych, czyli domknięciem zbioru funkcji stałych o wartościach z przedziału $[-1, 1]$. Teraz wystarczy zauważyć, że granica ciągu funkcji stałych też jest funkcją stałą.

Rozwiązanie zadania M 1225.
Daną szachownicę 10×10 podzielmy na 25 kwadratów $K_1, K_2, \ldots, K_{25}$ o wymiarach 2×2.
Zgodnie z warunkami zadania, na polach kwadratu K_i umieszczono co najwyżej jedną liczbę parzystą i co najwyżej jedną liczbę podzielną przez 3. Zatem każdy kwadrat K_i zawiera co najmniej dwie spośród liczb 1, 5, 7. Stąd wynika, że na danej szachownicy znajduje się co najmniej 50 liczb ze zbioru $\{1, 5, 7\}$. Wobec tego jedna z tych liczb występuje co najmniej 17 razy.