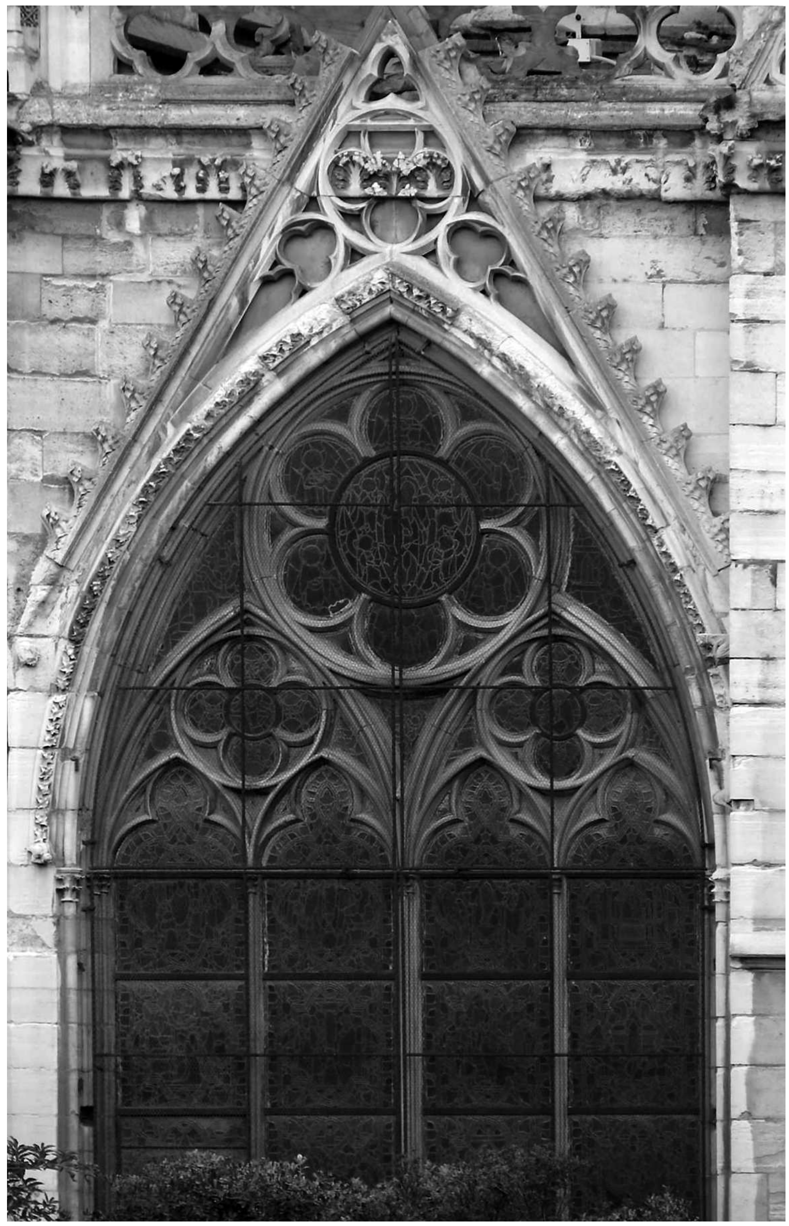
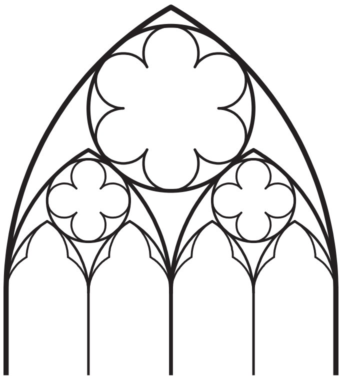
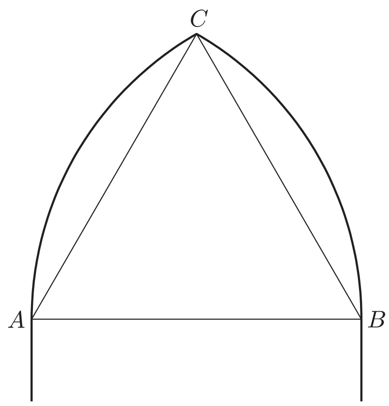
Okna gotyckie



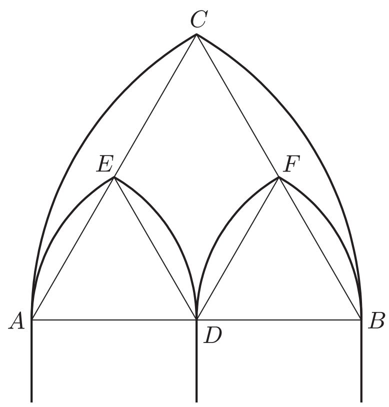


Rys. 1

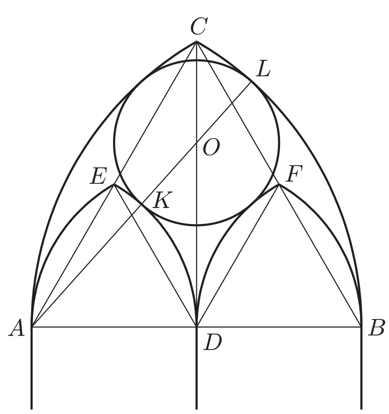
Począwszy od drugiej połowy XII wieku w całej Francji, a później także w innych krajach, zaczęły powstawać liczne kościoły gotyckie. Cechą charakterystyczną architektury gotyckiej było bogate zdobnictwo kamienne. Wielkie rzeźbione portale i bogato zdobione okna to tylko niektóre z charakterystycznych elementów tego stylu. Jedno z okien paryskiej katedry Notre Dame wygląda tak jak na rysunku 1. Podobne okna występują w wielu innych kościołach gotyckich; rysunek takiego okna możemy znaleźć także na banknocie 20 euro. W tym artykule przyjrzymy się geometrii tego okna. Pierwsze, co się rzuca w oczy, to łuk ostry. Taki łuk jest jednym z najbardziej typowych elementów architektury gotyku. Jak przebiega jego geometryczna konstrukcja?



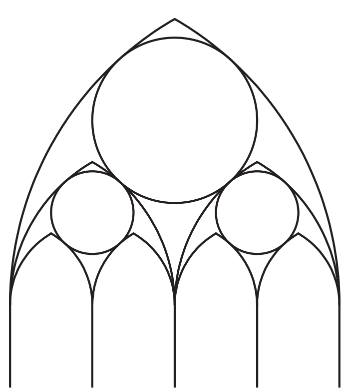
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Klasyczny ostrołuk powstaje z dwóch łuków okręgu. Bierzemy poziomy odcinek AB o długości a (będzie to „podstawa” ostrołuku), a następnie z punktów A i B zataczamy łuki o promieniu AB, przecinające się w punkcie C. Widzimy tę konstrukcję na rysunku 2. Trójkąt ABC jest, oczywiście, trójkątem równobocznym. W ten ostrołuk musimy wpisać dwa mniejsze ostrołuki i okrąg styczny do czterech łuków: dwóch dużych łuków AC i BC oraz dwóch łuków o dwa razy mniejszych promieniach.

Zacznijmy od wpisania dwóch mniejszych ostrołuków. Niech D będzie środkiem odcinka AB. Z punktów A i D zataczamy łuki o promieniu AD, przecinające się w punkcie E; podobnie z punktów D i B zataczamy łuki o promieniu DB przecinające się w punkcie F. Oczywiście, trójkąty ADE i DBF są równoboczne. Mamy już trzy ostrołuki (rysunek 3), musimy teraz wpisać okrąg.

Jego środek O oczywiście leży na osi symetrii okna, czyli na odcinku CD. Musimy tylko wiedzieć, jak wysoko on się znajduje nad podstawą AB (tzn. jaką długość ma odcinek DO) oraz jak duży jest promień tego okręgu. Aby się tego dowiedzieć, skorzystamy z dwóch faktów. Pierwszym jest prosta obserwacja, że punkt styczności dwóch okręgów jest współliniowy ze środkami tych okręgów. Drugim będzie znane twierdzenie Pitagorasa.

Niech więc okrąg o środku w punkcie O będzie styczny do łuków AC, BC, DE i DF (rysunek 4). Punkty styczności K i L są współliniowe z punktami A i O. Odcinki AB i AL są promieniami tego samego okręgu; zatem $AL = AB$. Podobnie odcinki AD i AK są promieniami tego samego okręgu, a więc $AK = AD = \frac{a}{2}$. Stąd wynika, że

$$KL = AB - AD = \frac{a}{2}.$$

Ponieważ odcinek KL jest średnicą okręgu o środku O, więc promień tego okręgu jest równy $\frac{a}{4}$. Stąd zaś wynika, że

$$AO = \frac{3a}{4}.$$

Teraz możemy obliczyć długość odcinka DO. W tym celu zastosujemy twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ADO:

$$DO^2 = AO^2 - AD^2 = \frac{9a^2}{16} - \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2 - 4a^2}{16} = \frac{5a^2}{16},$$

czyli

$$DO = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

Wiemy już, gdzie znajduje się środek O, znamy też promień okręgu, więc możemy go narysować. Możemy też łatwo wyznaczyć środek tego okręgu konstrukcyjnie, za pomocą cyrkla i linijki. Dzielimy odcinek AB na cztery równe części i łączymy środek D z punktem C. Następnie zakreślamy z punktu A łuk okręgu o promieniu $\frac{3a}{4}$; jest to długość odcinka od punktu A do środka odcinka DB. Punkt przecięcia tego łuku z odcinkiem CD jest właśnie środkiem O.

Teraz wewnątrz ostrołuków AED i DFB powtarzamy tę samą konstrukcję (rysunek 5). Mamy już prawie kompletne okno. Pozostaje tylko wypełnienie trzech okręgów i wnętrz najmniejszych ostrołuków. To jednak zrobimy następnym razem.

Małą Deltę przygotował Wojciech GUZICKI