O pożytku z obrotów

Waldemar POMPE

Izometrią płaszczyzny euklidesowej nazywamy takie odwzorowanie tej płaszczyzny w siebie, które nie zmienia odległości między punktami. Obroty, przesunięcia lub symetrie osiowe to najprostsze przykłady izometrii. Wśród wszystkich izometrii możemy wyróżnić te, które nie zmieniają orientacji płaszczyzny, są to tzw. *izometrie parzyste*. Okazuje się, że *jedynymi izometriami parzystymi są obroty lub przesunięcia*.

Z tego stwierdzenia wynika w szczególności, że złożeniem dwóch obrotów (o niekoniecznie jednakowych środkach) jest obrót lub przesunięcie, bowiem złożenie dwóch izometrii parzystych jest izometrią parzystą. Można udowodnić nieco dokładniejszą zależność: Jeśli przez R_X^α oznaczymy obrót wokół punktu X o kąt α (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), a przez T_v przesunięcie o wektor v, to

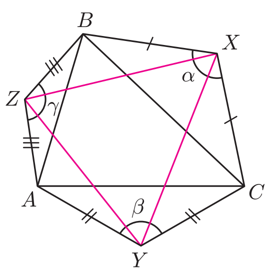
(1) $$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = T_v$$

gdy $\alpha+\beta$ jest całkowitą wielokrotnością kąta 360°, oraz dla pewnego punktu C

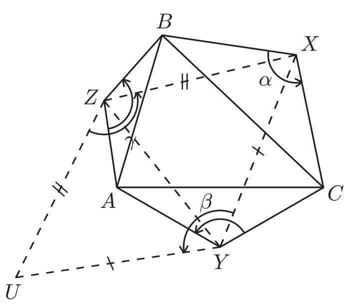
(2) $$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = R_C^{\alpha+\beta},$$

w przeciwnym przypadku.

W niniejszym artykule nie będziemy dowodzić tych równości. Pokażemy natomiast, jak można je wykorzystać do odkrywania ciekawych, często nieoczywistych zależności geometrycznych.



Rys. 1



Rys. 2

Przykład 1. *Na bokach trójkąta ABC zbudowano po jego zewnętrznej stronie trójkąty równoramienne BCX, CAY, ABZ, przy czym $BX=XC$, $CY=YA$, $AZ=ZB$ (rys. 1). Niech*

$$\alpha = \sphericalangle BXC, \quad \beta = \sphericalangle CYA, \quad \gamma = \sphericalangle AZB.$$

Wówczas jeśli $\alpha+\beta+\gamma=360°$, to miary kątów trójkąta XYZ przy wierzchołkach X, Y, Z wynoszą odpowiednio $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, $\frac{1}{2}\gamma$.

Rozpatrzmy odwzorowanie $R_Z^\gamma \circ R_Y^\beta \circ R_X^\alpha$. Ponieważ $\alpha+\beta+\gamma=360°$, więc zgodnie z powyższym stwierdzeniem złożenie to jest przesunięciem T_v o pewien wektor v. Ponadto $R_X^\alpha(B)=C$, $R_Y^\beta(C)=A$ oraz $R_Z^\gamma(A)=B$, skąd wynika, że $T_v(B)=B$. Przesunięcie T_v ma więc punkt stały B, wobec czego T_v musi być identycznością.

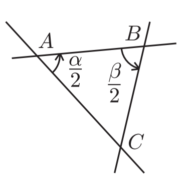
Prześledźmy zatem kolejne położenia obrazu punktu X przy rozpatrywanym złożeniu (rys. 2). Oczywiście, $R_X^\alpha(X)=X$, dalej oznaczmy przez U punkt $R_Y^\beta(X)$. Wtedy $XY=UY$ oraz $\sphericalangle XYU=\beta$. Rozpatrywane złożenie jest identycznością, a więc musi być spełniona zależność $R_Z^\gamma(U)=X$. To z kolei oznacza, że $XZ=UZ$ oraz $\sphericalangle XZU=\gamma$.

W efekcie uzyskujemy przystające trójkąty XYZ i UYZ (cecha bok-bok-bok), przy czym $\sphericalangle XYU=\beta$ oraz $\sphericalangle XZU=\gamma$. Stąd otrzymujemy $\sphericalangle XYZ=\frac{1}{2}\beta$ oraz $\sphericalangle YZX=\frac{1}{2}\gamma$, a zatem również $\sphericalangle ZXY=\frac{1}{2}\alpha$. To kończy dowód.

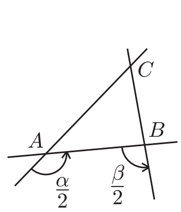
Z przykładu tego bezpośrednio wynika kilka słynnych twierdzeń lub znanych zadań. Jednym z nich jest tzw. twierdzenie Napoleona: *Środki trójkątów równobocznych zbudowanych na bokach dowolnego trójkąta (po jego zewnętrznej stronie) są wierzchołkami trójkąta równobocznego.* Dla dowodu wystarczy w powyższym przykładzie przyjąć $\alpha=\beta=\gamma=120°$.

Inną ciekawą zależność geometryczną uzyskujemy, przyjmując $\alpha=\beta=90°$ oraz $\gamma=180°$: *Środki kwadratów zbudowanych na dwóch bokach dowolnego trójkąta (po jego zewnętrznej stronie) oraz środek trzeciego boku tego trójkąta są wierzchołkami trójkąta prostokątnego równoramiennego.*

Kątem skierowanym między prostymi k i l nazywamy taki kąt, o jaki należy obrócić prostą k (w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara), aby uzyskać prostą równoległą do prostej l. Kąt ten oznaczamy symbolem $\sphericalangle(k,l)$. Warto zwrócić uwagę, że jest on wyznaczony z dokładnością do 180°, w przeciwieństwie do kąta skierowanego między *półprostymi*, który jest wyznaczony z dokładnością do 360°.



Rys. 3



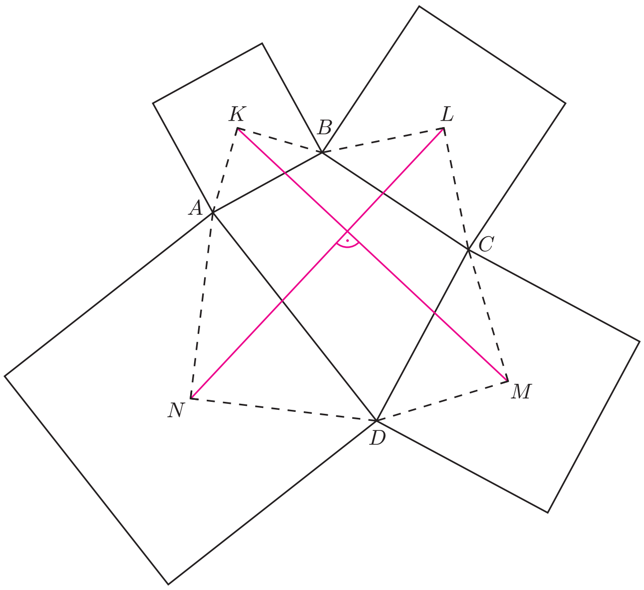
Rys. 4

Pojęcie kąta skierowanego między prostymi można wykorzystać do opisu konstrukcji punktu C spełniającego zależność (2). Okazuje się bowiem, że punkt C jest wyznaczony przez następujące warunki (rys. 3 i 4)

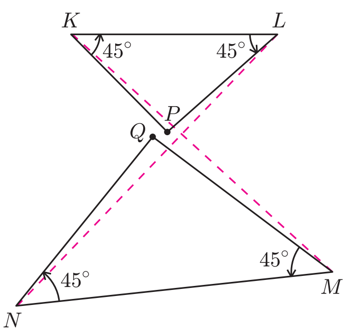
(3) $$\sphericalangle(CA,AB)=\frac{\alpha}{2} \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle(AB,BC)=\frac{\beta}{2}.$$

Z zależności tych, które także pozostawimy bez dowodu, będziemy korzystać w kolejnych przykładach.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 5



Rys. 6

Przykład 2. *Na bokach AB, BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty o środkach odpowiednio K, L, M, N. Wówczas odcinki KM i LN są prostopadłe i równej długości* (rys. 5).

Rozpatrzmy odwzorowanie $R_N^{90°} \circ R_M^{90°} \circ R_L^{90°} \circ R_K^{90°}$. Zgodnie ze wzorami (1) i (2) odwzorowanie to jest przesunięciem T_v. Z drugiej strony, punkt A jest punktem stałym tego odwzorowania, skąd bezpośrednio wnioskujemy, że T_v jest identycznością.

Niech P będzie takim punktem, że $\sphericalangle(PK, KL) = \sphericalangle(KL, LP) = 45°$ (rys. 6). Podobnie, niech Q będzie takim punktem, że $\sphericalangle(QM, MN) = \sphericalangle(MN, NQ) = 45°$. Wówczas wykorzystując zależności (2) i (3), uzyskujemy

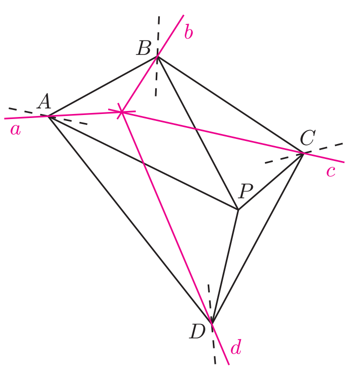
$$R_L^{90°} \circ R_K^{90°} = R_P^{180°} \quad \text{oraz} \quad R_N^{90°} \circ R_M^{90°} = R_Q^{180°}.$$

Wobec tego złożenie $R_Q^{180°} \circ R_P^{180°}$ jest identycznością, co z kolei oznacza, że

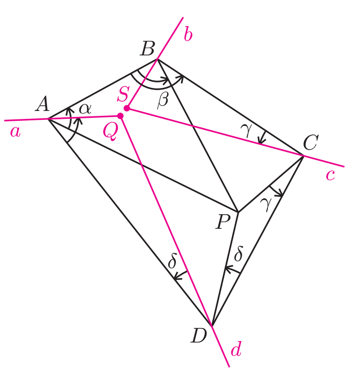
$$R_P^{180°} = R_Q^{180°},$$

czyli $P = Q$. Pozostaje zauważyć, że obrót wokół punktu P o kąt $90°$ przeprowadza odcinek LN na odcinek KM, skąd wynika, że odcinki te są prostopadłe i równej długości.

Oba przykłady stanowią znakomitą ilustrację tego, jakie możliwości daje twierdzenie o składaniu obrotów. Można jednak odnieść wrażenie, że stosuje się ono jedynie tam, gdzie pojawiają się trójkąty równoramienne: wtedy w naturalny sposób możemy wybrać zarówno środek, jak i kąt obrotu. Na koniec pokażemy przykład, w którym nie występują trójkąty równoramienne, a mimo to można efektywnie wykorzystać wzory (1)–(3).



Rys. 7



Rys. 8

Przykład 3. *Punkt P leży wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$, przy czym*

$$\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°.$$

Niech a, b, c, d, będą odpowiednio obrazami prostych PA, PB, PC, PD w symetriach względem dwusiecznych kątów $\sphericalangle DAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDA$ (rys. 7). *Wówczas proste a, b, c, d przecinają się w jednym punkcie.*

Przyjmijmy $\alpha = \sphericalangle(PA, AB)$, $\beta = \sphericalangle(AB, BP)$, $\gamma = \sphericalangle(PC, CD)$, $\delta = \sphericalangle(CD, DP)$ oraz rozpatrzmy odwzorowanie $R_D^{2\delta} \circ R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha}$ (rys. 8).

Ze wzorów (2) i (3) wynika, że odwzorowanie to jest równe $R_P^{2\gamma+2\delta} \circ R_P^{2\alpha+2\beta}$. Z kolei z założenia $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180°$ wnioskujemy, że

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180°.$$

Wobec tego rozpatrywane złożenie jest identycznością.

Zatem identycznością jest także przekształcenie $R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} \circ R_A^{2\alpha} \circ R_D^{2\delta}$ (korzystamy tu z prostego faktu, który mówi, że jeśli dla bijekcji f i g odwzorowanie $f \circ g$ jest identycznością, to także odwzorowanie $g \circ f$ jest identycznością).

Niech Q będzie punktem przecięcia prostych a i d, a S punktem przecięcia prostych b i c. Wówczas wykorzystując zależności (2) i (3), wnioskujemy, że

$$R_A^{2\alpha} \circ R_D^{2\delta} = R_Q^{2\delta+2\alpha} \quad \text{oraz} \quad R_C^{2\gamma} \circ R_B^{2\beta} = R_S^{2\beta+2\gamma}.$$

Wobec tego $R_S^{2\beta+2\gamma} \circ R_Q^{2\alpha+2\delta}$ jest identycznością, czyli

$$R_S^{2\beta+2\gamma} = R_Q^{-2\beta-2\gamma}.$$

Stąd uzyskujemy $Q = S$, co oznacza, że proste a, b, c, d przecinają się w jednym punkcie.