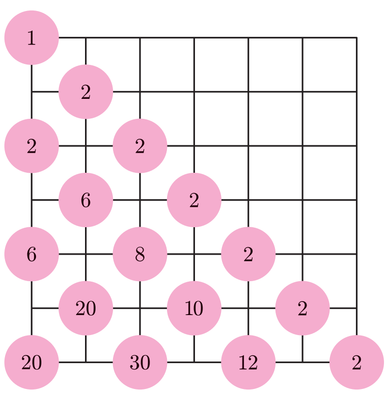
O pani Kowalskiej, jej mierze i losowym spacerze

motywy Logo

Andrzej WALAT

Na początek wyjaśnienie. W tytule chodzi o tę panią Kowalską, z którą romansował nasz wielki poeta Adam Mickiewicz. Pisał on, jeśli dobrze zapamiętałem szkolne lektury, że *czucie i wiara* przemawiają do niego silniej niż *mędrca szkiełko i*... miara. Z pewnością wolał mieć do czynienia z żywą panią Kowalską niż z jej miarą. Ale różnice między obiektem i jego miarą występują także w wielu innych przypadkach. Zajmijmy się, na przykład, spacerem losowym będącym przedmiotem zainteresowania fizyków, ponieważ jest to model ważnych zjawisk fizycznych. W *Feynmana wykładach z fizyki* jest to temat rozdziału 6 t. 1 cz. 1 pt. *Prawdopodobieństwo*. Spacer zaczyna się od ustawienia pionka na osi liczbowej w punkcie 0, następnie krok po kroku rzucamy monetę i zależnie od wyniku przesuwamy pionek o jedną jednostkę w kierunku dodatnim albo ujemnym. Co możemy powiedzieć o takim ruchu? Feynman w paragrafie 6.3 stawia pytanie: Jak daleko średnio biorąc oddali się pionek od punktu wyjścia po n ruchach, czyli jaka będzie średnia wartość $|D_n|$? I od razu stwierdza „Wygodniej nam jednak będzie obliczać inną wielkość, którą można uważać za miarę odchylenia, mianowicie kwadrat przesunięcia $|D_n|^2$". Po czym następuje piękny dowód prostego wzoru: $\langle D_n^2 \rangle = n$ i w konsekwencji, za miarę średniego odchylenia przyjmujemy $D_{\text{śr}} = \sqrt{n}$.

W terminologii rachunku prawdopodobieństwa ta miara nazywa się odchyleniem standardowym. Proponuję, żebyśmy od tej chwili, trochę inaczej niż w podręczniku Feynmana, symbolem $D_{\text{śr}}$ oznaczali średnie odchylenie, a symbolem σ jego miarę – odchylenie standardowe. Pozostaje ciągle otwarte, **niewygodne** pytanie: jak bardzo różni się tak obliczona miara średniego odchylenia (czyli odchylenie standardowe) od faktycznej średniej wartości odchylenia, czyli od średniej wartości $|D_n|$? Nie znamy prostego wzoru, ale możemy poszukać innego sposobu – na przykład napisać procedurę obliczania średniego odchylenia. Spróbujmy. Rysunek przedstawia trójkąt liczb. Nazwijmy go STP, ponieważ jest on „sklejeniem" dwóch połówek trójkąta Pascala. Liczby w wierszu n mówią, ile różnych wyników sekwencji n rzutów monetą prowadzi do określonej wartości $|D_n|$. (Wiersze, tak jak w trójkącie Pascala, numerujemy od góry w dół, zaczynając od zera). Na przykład $|D_4|$ – odchylenie od 0 po czterech krokach – może mieć wartość 0, 2 lub 4. Do takich odchyleń prowadzi odpowiednio 6, 8 oraz 2 spośród 16 różnych wyników sekwencji czterech rzutów monetą. Po podzieleniu [6 8 2] przez 16 otrzymujemy listę [0.375 0.5 0.125] określającą rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $|D_4|$. Średnia wartość $|D_4|$ jest równa iloczynowi skalarnemu:



$$[0\ 2\ 4] \cdot [0.375\ 0.5\ 0.125] = 1.5,$$

tak więc $D_{\text{śr}} = 0.75\sigma$.

A jak to jest dla większych n? Zauważmy, że wiersz STP o numerze $n = 2k$ jest sumą swego rodzaju przesunięć w lewo i w prawo wiersza o numerze $2k-1$. Na przykład,

czwarty wiersz $[6\ 8\ 2] = [0\ 6\ 2] + [6\ 2\ 0]$,
szósty wiersz $[20\ 30\ 12\ 2] = [0\ 20\ 10\ 2] + [20\ 10\ 2\ 0]$.

Każdy wiersz o numerze nieparzystym $n = 2k+1$ można otrzymać przez zsumowanie przesunięć wiersza o numerze $2k$ i zastąpienie pierwszych dwóch wyrazów ich sumą. W bardzo podobny sposób można obliczać rozkłady kolejnych zmiennych $|D_n|$ (wyniki identycznych operacji dzielimy dodatkowo przez 2). Funkcję, która mając dwie dane: liczbę naturalną n oraz rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $|D_n|$, wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej $|D_{n+1}|$, można zdefiniować w Logo w następujący sposób.

```
oto next :n :rpn
wynik (jeżeli reszta :n 2 = 0 [spr :rpn][redukt spr :rpn]) / 2
już
```

Rozwiązanie zadania M 1222.
Oznaczmy: $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$. Wtedy liczba $x+y+z$ jest całkowita oraz $xyz = 1$. Również liczba

$$xy + yz + zx = \frac{xy+yz+zx}{xyz} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

jest całkowita.

Rozpatrzmy wielomian

$$f(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz.$$

Wielomian ten ma współczynniki całkowite oraz wymierne pierwiastki x, y, z. Ponadto współczynnik przy t^3 jest równy 1, a wyraz wolny wynosi -1. Wobec tego pierwiastkami wymiernymi wielomianu f mogą być jedynie liczby 1 lub -1. Zatem $|x| = |y| = |z| = 1$, skąd bezpośrednio uzyskujemy tezę.

Występujące w tej definicji funkcje pomocnicze `spr` (suma przesunięć) oraz `redukt` definiujemy w następujący sposób.

```
oto spr :lista
wynik (nap 0 :lista) + (nak 0 :lista)
już
```

```
oto redukt :lista
wynik nap (element 1 :lista) + (element 2 :lista) bp bp :lista
już
```

Możemy teraz zdefiniować funkcję, która dla $n > 0$ wyznacza rozkład $|D_n|$.

```
oto rozkład :n
niech "r [1]
powtórz :n [przyp "r next npw :r]
wynik :r
już
```

Zdefiniujemy jeszcze funkcję, która wyznacza listę wartości zmiennej $|D_n|$.

```
oto wartości :n
niech "el reszta :n 2
niech "w (lista :el)
powtórz ilorazc :n 2 [przyp "el :el + 2 przyp "w nak :el :w]
wynik :w
już
```

I wreszcie funkcję, która daje wartość średnią $|D_n|$, obliczając odpowiedni iloczyn skalarny.

```
oto średnia :n
wynik ilSkal wartości :n rozkład :n
już
```

```
oto ilSkal :w1 :w2
niech "il 0
niech "d długość :w1
powtórz :d [przyp "il :il + (element npw :w1) * (element npw :w2)]
wynik :il
już
```

Teraz po napisaniu polecenia `powtórz 10 [ps (średnia npw * npw) / npw]` otrzymamy stosunek wartości średniego odchylenia $D_{śr}$ do odpowiedniego odchylenia standardowego σ dla dziesięciu kolejnych liczb kwadratowych.

```
1
0.75
0.820313
0.785522
0.805901
0.792364
0.801966
0.794774
0.800351
0.795892
```

Dla setnej liczby kwadratowej $n = 10000$ mamy $D_{śr} \approx 79.7865 \approx 0.7979\sigma$.

Okazało się, że w przypadku spaceru losowego odchylenie standardowe jest miarą średniego odchylenia trochę na wyrost. Suknia uszyta dla pani Kowalskiej według takiej miary byłaby na nią za luźna.

Rozwiązanie zadania M 1223.
Proste MN i AC są równoległe, więc trójkąty PQC i SQN są podobne. Ponadto $PC = QC$, skąd uzyskujemy $SN = QN$.

Niech $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ oraz oznaczmy $p = (a+b+c)/2$. Wtedy

$$SN = QN = BN - BQ = \\ = \frac{a}{2} - (p-b) = \frac{b-c}{2}.$$

A zatem

$$MS = MN - SN = \\ = \frac{b}{2} - \frac{b-c}{2} = \frac{c}{2} = AM.$$

Stąd $\sphericalangle CAS = \sphericalangle ASM = \sphericalangle MAS$, co należało wykazać.

Rozwiązanie zadania F 727.
Ważenie ciała zanurzonego w wodzie daje wynik równy różnicy sił ciężkości i wyporu:

$$P_1 = Q - F_{\text{w wody}},$$

gdzie $P_1 = 0,85$ N, $Q = mg$, a $F_{\text{w wody}} = \rho_{\text{wody}} V g$. Analogicznie, po zanurzeniu w nafcie mamy:

$$P_2 = Q - F_{\text{w nafty}}.$$

Dzieląc powyższe równania stronami, oraz podstawiając $\rho = m/V$, otrzymujemy:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho - \rho_{\text{wody}}}{\rho - \rho_{\text{nafty}}},$$

i stąd:

$$\rho = \frac{P_2\rho_{\text{wody}} - P_1\rho_{\text{nafty}}}{P_2 - P_1}.$$

Po wstawieniu wartości liczbowych ($\rho_{\text{nafty}} \approx 800$ kg/m^3) otrzymujemy szukaną gęstość ciała $\rho \approx 2700$ kg/m^3 – prawdopodobnie jest ono zbudowane z aluminium.