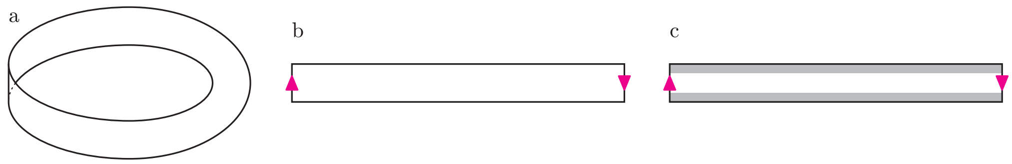
Powierzchnie: zajęcia praktyczno–techniczne

Piotr PRZYTYCKI[*]

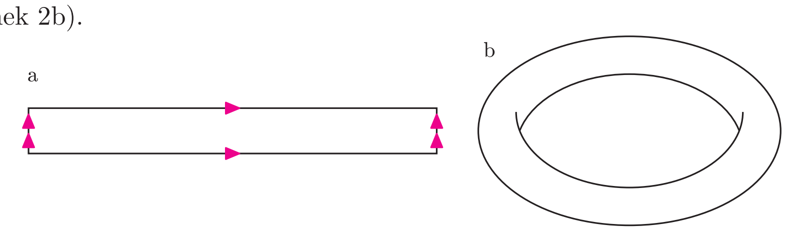
Wstęgą Möbiusa nazywamy powierzchnię z brzegiem (rysunek 1a) otrzymaną z prostokąta w wyniku sklejenia jednej pary jego przeciwległych boków w sposób zaznaczony na rysunku 1b.

Zauważmy, że brzeg wstęgi Möbiusa jest pojedynczą krzywą zamkniętą. W przyszłości potrzebna nam będzie następująca obserwacja: odcinając od wstęgi Möbiusa cienki pierścień, przylegający do jej brzegu, otrzymujemy znowu wstęgę Möbiusa (patrz rysunek 1c).

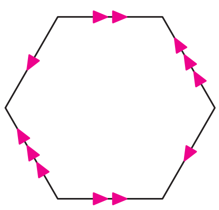


Rys. 1

Torusem nazywamy powierzchnię bez brzegu otrzymaną z prostokąta (lub innego równoległoboku) przez sklejenie dwóch par przeciwległych boków w sposób zaznaczony na rysunku 2a. W „przyrodzie" torus pojawia się m.in. jako powierzchnia dętki samochodowej albo amerykańskiego pączka (rysunek 2b).

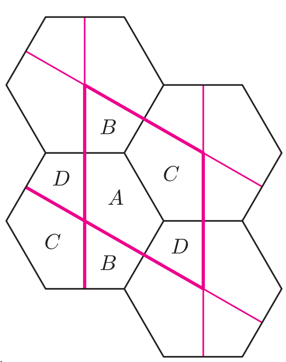


Rys. 2



Rys. 3

Jaką powierzchnię otrzymujemy, sklejając trzy pary przeciwległych boków sześciokąta foremnego, w sposób zaznaczony na rysunku 3? Jeśli wykorzystamy sześciokątną siatkę na płaszczyźnie, to przekonamy się, że otrzymujemy torus. Mianowicie, dzielimy sześciokąt na cztery części (patrz rysunek 4) i przeklejamy je zgodnie z siatką, otrzymując równoległobok z odpowiednimi sklejeniami.

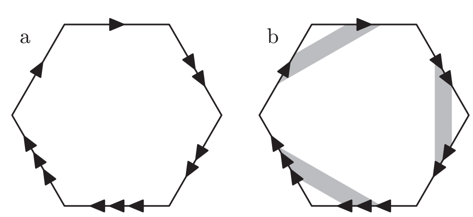


Rys. 4

Ten artykuł jest poświęcony dowodowi następującego lematu, który jest ważnym elementem klasyfikacji powierzchni. Zainteresowanym zastosowaniem tego lematu do twierdzenia klasyfikacyjnego polecamy rozdział 12.4 książki R. Engelkinga i K. Siekluckiego *Geometria i topologia*, część II. Tych, którzy z poniższym lematem się już zetknęli, zachęcamy do porównania naszego dowodu z dowodem, który znają.

Lemat. *Po wycięciu z torusa koła i przyklejeniu do otrzymanej powierzchni wzdłuż brzegu wstęgi Möbiusa otrzymamy tę samą powierzchnię, co po wycięciu ze sfery trzech kół i wklejeniu na ich miejsce trzech wstęg Möbiusa.*

Dowód. **Krok I.** Zauważmy, że powierzchnia otrzymana ze sfery przez wycięcie trzech kół i wklejenie na ich miejsce trzech wstęg Möbiusa powstaje z sześciokąta foremnego po sklejeniu jego boków w sposób przedstawiony na rysunku 5a: trzy wstęgi Möbiusa zaznaczone są na rysunku 5b (gdzie każdy bok sześciokąta został podzielony na trzy odcinki równej długości).

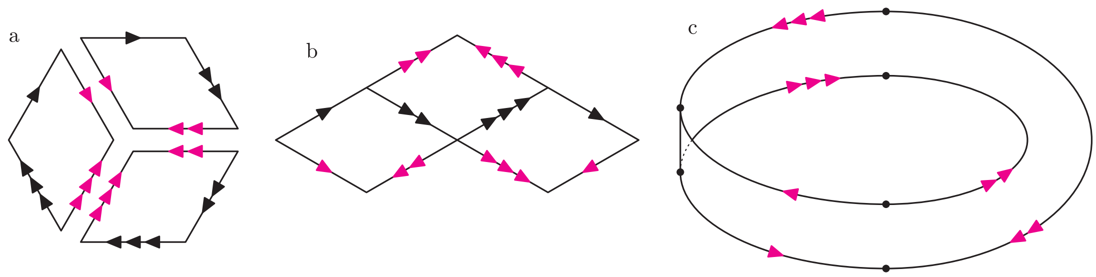


Rys. 5

Pozostawiamy Czytelnikowi przekonanie się, że po usunięciu tych trzech wstęg Möbiusa dostajemy sferę z wyciętymi trzema kołami.

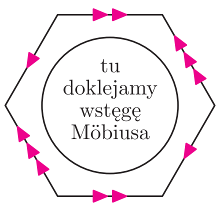
[*]Instytut Matematyczny PAN

Krok II. Dzielimy sześciokąt z poprzedniego kroku (rysunek 5a) na trzy części jak na rysunku 6a i sklejamy je wzdłuż fragmentów ich brzegu pochodzących z brzegu wyjściowego sześciokąta. Rezultat dwóch z tych klejeń widzimy na rysunku 6b (jedną z części odwróciliśmy na drugą stronę). Po wykonaniu trzeciego klejenia otrzymujemy wstęgę Möbiusa, na której brzegu zaznaczono, które fragmenty należy skleić, by otrzymać wyjściową powierzchnię, patrz rysunek 6c.



Rys. 6

Krok III. We wstędze Möbiusa, otrzymanej w poprzednim kroku, rozważamy teraz cienki pierścień przyległy do brzegu. Dzięki obserwacji z początku artykułu powierzchnia, którą badamy, powstaje z tego pierścienia przez doklejenie do jednej składowej jego brzegu wstęgi Möbiusa i sklejenie drugiej składowej jego brzegu tak, jak brzegu wstęgi Möbiusa z rysunku 6c, patrz rysunek 7. Jeśli ten rysunek porównamy z rysunkiem 3, to stwierdzimy, że nasza powierzchnia jest torusem, z którego wycięliśmy koło i zastąpiliśmy wstęgą Möbiusa, co kończy dowód.



Rys. 7

Zadania

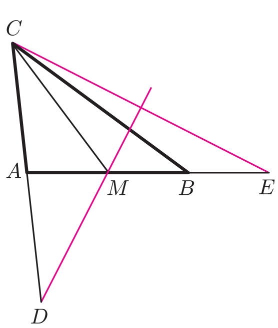
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 725. Po przejściu wiązki neutronów przez płaską płytkę o grubości 1 mm, wykonaną z kadmu, ich liczba zmniejszyła się o 15 %, a prędkość nie zmieniła się. Jaka część wiązki neutronów przejdzie przez płytkę z kadmu o grubości 8 mm?
Rozwiązanie na str. 15

F 726. Promień światła o natężeniu I_0 pada na płaskorównoległą płytkę prostopadle do jej powierzchni. Znaleźć natężenie światła po przejściu przez tę płytkę. Współczynnik odbicia światła jest równy R.
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1219. Niech $f(x) = x^2 + 12x + 30$. Rozwiązać równanie
$$f(f(f(f(f(x))))) = 0\,.$$
Rozwiązanie na str. 2



M 1220. W trójkącie ABC długość środkowej CM jest równa długości boku AB (rys.). Punkt D jest symetryczny do punktu C względem punktu A. Punkt E jest symetryczny do punktu M względem punktu B. Wykazać, że proste DM i CE są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 4

M 1221. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że wypisując cyfry liczby n w odwrotnym porządku, uzyskamy liczbę $3n$. (Rozpatrujemy zapis dziesiętny liczby n.)
Rozwiązanie na str. 14