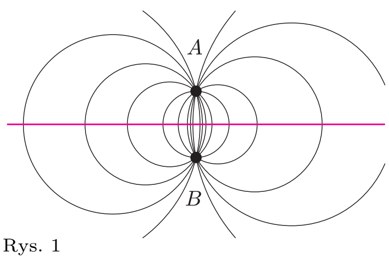
# mała delta

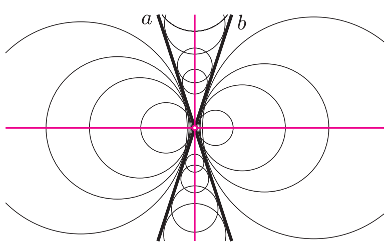
## Łatwe zadania od mmm

**1.** Ile jest okręgów przechodzących przez dany punkt $A$? Nieskończenie wiele. A które punkty mogą być środkiem takiego okręgu? Każdy poza $A$. Ile jest okręgów stycznych do danej prostej $a$? Też nieskończenie wiele, a środkiem takiego okręgu może być każdy punkt nieleżący na $a$. A ile jest okręgów stycznych do danego okręgu $o$? Również nieskończenie wiele, tym razem środkiem może być każdy punkt z wyłączeniem środka okręgu $o$. To było za łatwe. Weźmy się wobec tego za dwa obiekty – punkty, proste czy okręgi.

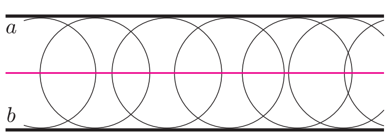
**2.** Przez dwa dane punkty $A$ i $B$ również przechodzi nieskończenie wiele okręgów, ale tym razem środkiem takiego okręgu może być tylko dowolny punkt symetralnej odcinka $AB$ (rys. 1). Okręgów stycznych do dwóch danych prostych również jest nieskończenie wiele – ich środki wypełniają dwusieczne kątów wierzchołkowych utworzonych przez te proste, gdy one przecinają się (z wyjątkiem owego punktu przecięcia (rys. 2)), lub prostą połowiącą pas ograniczony przez te proste, gdy są one równoległe (rys. 3). Środki nieskończenie wielu okręgów przechodzących przez dany punkt $A$ i stycznych do danej prostej $a$ są tak samo odległe od tego punktu, jak od tej prostej – figura utworzona z takich punktów to parabola (znana też jako wykres funkcji kwadratowej; rys. 4), gdy $A$ nie leży na $a$, lub prosta z wyłączeniem punktu $A$ w przeciwnym przypadku (rys. 5). Figura, jaką tworzy nieskończenie wiele środków okręgów przechodzących przez dany punkt $A$ i stycznych do danego okręgu $o$, to hiperbola (podobna do wykresu odwrotnej proporcjonalności – różnica odległości od dwóch punktów jest stała; rys. 6), gdy punkt leży na zewnątrz koła wyznaczonego przez $o$ – lub elipsa (suma odległości od dwóch punktów jest stała), gdy leży wewnątrz (rys. 7). Oczywiście $A$ nie może być środkiem okręgu $o$ (chyba że umówilibyśmy się, iż okrąg jest styczny do siebie samego). Natomiast, gdy $A$ będzie leżał na $o$, sytuacja będzie podobna do tej z rysunku 5.



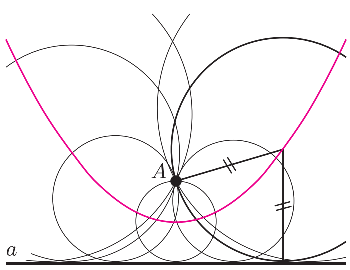

Rys. 1



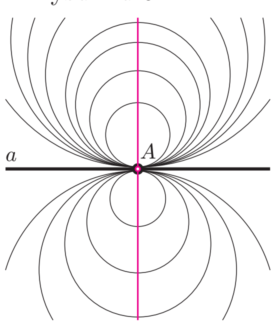

Rys. 2



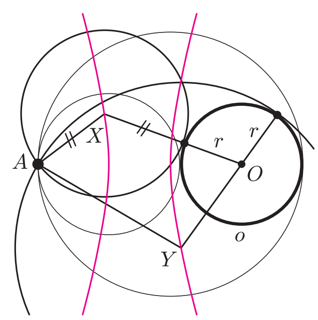

Rys. 3



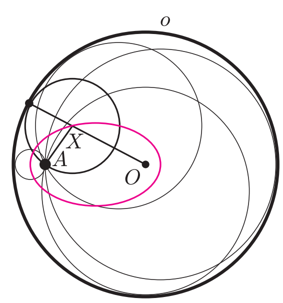

Rys. 4




Rys. 5



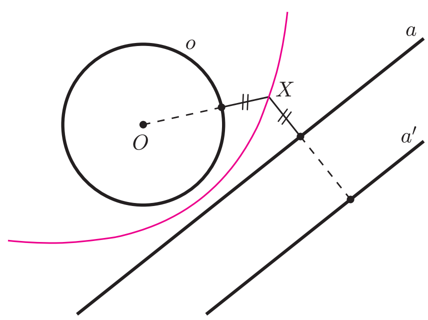

Rys. 6. $OX - AX = r = AY - OY$.



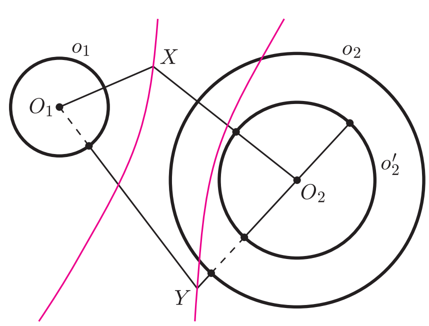

Rys. 7. $AX + OX = r$.

Nie trzeba się też specjalnie natrudzić, by zauważyć, że pozostałe dwa przypadki nie wnoszą niczego nowego (rys. 8 i rys. 9).

Jak widać, gdy występuje okrąg i prosta (lub dwa okręgi), można okrąg zastąpić punktem, przesuwając prostą o długość jego promienia (lub zmniejszając tak promień drugiego okręgu).




Rys. 8. Zamiast dla $o$ i $a$ rozwiązujemy zadanie dla $O$ i $a'$.



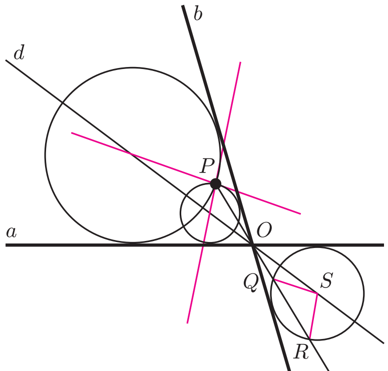

Rys. 9. Zamiast dla $o_1$ i $o_2$ rozwiązujemy zadanie dla $O_1$ i $o_2'$.

**Różnica.** Każdy widzi, że okręgów w pierwszym przypadku jest więcej niż w drugim, choć teoria mnogości upierałaby się, że tyle samo. Różnicę można wyrazić, mówiąc, iż w drugim przypadku mamy do czynienia z *rodziną dwuparametrową*, co po ludzku oznacza, że gdy zażądamy, aby okrąg spełniający nasze warunki przechodził jeszcze przez jakiś dodatkowy punkt, to okręgów takich będzie co najwyżej dwa. W pierwszym przypadku mogłoby być ich więcej.

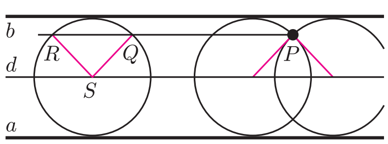
**Konstrukcja.** Co więcej, taki okrąg można skonstruować, choć ani paraboli, ani hiperboli, ani nawet elipsy (z wyjątkiem okręgu) cyrklem i linijką nakreślić się nie da.

Gdy do dwóch punktów $A$ i $B$ dodamy trzeci $P$, nieleżący na prostej $AB$, to okrąg przechodzący przez te punkty każdy potrafi nakreślić – jego środek to punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $ABP$.

Gdy do dwóch przecinających się w punkcie $O$ prostych $a$ i $b$ dodamy punkt $P$, to przez ten z kątów wierzchołkowych, w którego wnętrzu leży $P$, prowadzimy dwusieczną $d$ i prostą $OP$, następnie rysujemy dowolny okrąg styczny do $a$ i $b$ (rys. 10); oznaczmy jego środek przez $S$, a jego punkty przecięcia z $OP$ przez $Q$ i $R$. Punkty przecięcia $d$ z poprowadzonymi z $P$ równoległymi do $QS$ i do $RS$ będą środkami szukanych okręgów. Czytelnik zapewne potrafi sprawdzić, że tak jest, oraz rozwiązać problem, gdy $P$ leży na dwusiecznej lub na którejś z danych prostych. Gdy proste $a$ i $b$ są równoległe, prostą $d$ jest prosta połowiąca pas (rys. 11), a przez $P$ prowadzimy równoległą do $d$.

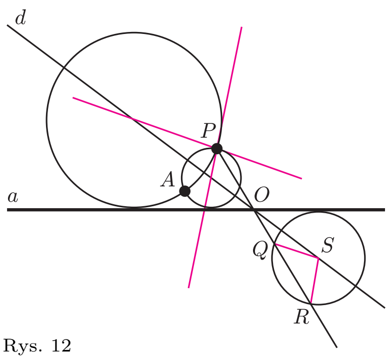


Rys. 10

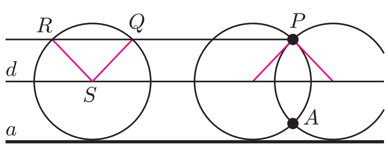


Rys. 11

Teraz do punktu $A$ i prostej $a$ dołączamy punkt $P$. Tu konstrukcja okazuje się bardzo podobna do poprzedniej (wręcz identyczna). Gdy symetralna $d$ odcinka $AP$ przecina $a$ w punkcie $O$, rysujemy dowolny okrąg o środku na $d$ i dalej postępujemy jak w poprzedniej konstrukcji (rys. 12). Podobnie analogiczna jest konstrukcja w przypadku, gdy $d$ i $a$ są równoległe (rys. 13).



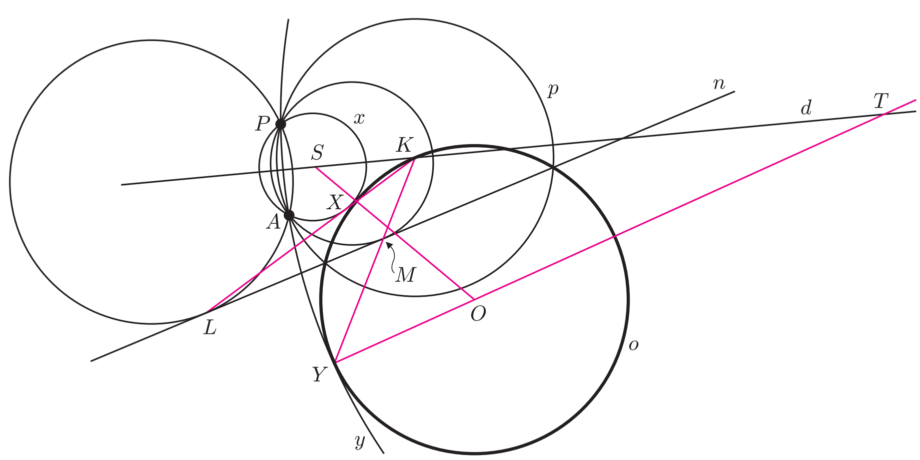
Rys. 12



Rys. 13

I teraz zaskoczenie. Dotąd było naprawdę łatwo. Tymczasem gdy dany jest punkt i okrąg ($A$ i $o$), znalezienie okręgu stycznego do $o$ i przechodzącego przez $A$ i przez dodatkowo dany punkt $P$ wymaga bardzo skomplikowanych konstrukcji. Podamy tu konstrukcję jedynie w (szczęśliwym) przypadku, gdy symetralna $d$ odcinka $AP$ przecina $o$. Oznaczmy jeden z punktów przecięcia przez $K$. Rysujemy okrąg $p$ o środku $K$ przechodzący przez $A$ i $P$ oraz prostą $n$, zawierającą wspólną cięciwę $o$ i $p$. Stosując poprzednią konstrukcję, znajdujemy dwa okręgi przechodzące przez $A$ i $P$ oraz styczne do $n$ odpowiednio w punktach $L$ i $M$. Proste $KL$ i $KM$ przecinają $o$ dodatkowo w punktach $X$ i $Y$. To są punkty styczności z $o$ szukanych okręgów $x$ i $y$ (rys. 14). Jeśli chcemy je narysować, przetnijmy proste $OX$ i $OY$ z $d$ – otrzymamy środki $S$ i $T$ okręgów przechodzących przez $A$ i $P$ oraz stycznych do $o$.

Czytelnik Wyrafinowany oczywiście wie, że w tych ostatnich przypadkach dogodnie jest posłużyć się inwersją względem okręgu. Każda taka konstrukcja da się przełożyć na standardową konstrukcję cyrklem i linijką, choć wtedy może to być bardzo skomplikowana operacja. O inwersjach pisaliśmy np. w *Delcie* 4(407)/2008.



Rys. 14

Ale dlaczego (i czy na pewno) to jest dobrze? Poprzednio uzasadnienie nie nastręczało specjalnych trudności, a teraz trudno o jakąś intuicję. I co zrobić, gdy $d$ nie przecina $o$?