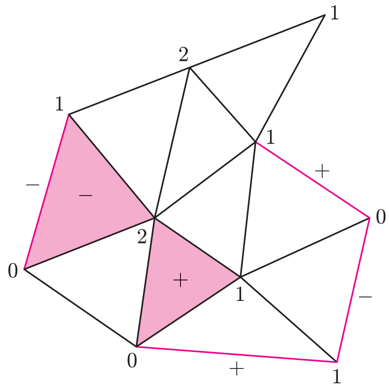
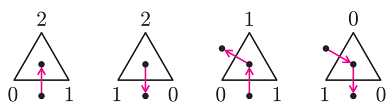
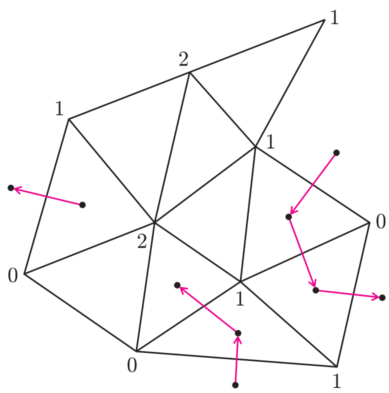
Kolorowanie wielomianów

Tomasz IDZIASZEK[*]



Rys. 1. Striangulowany wielokąt; kolorem wyróżniono trójkąty i odcinki odgrywające rolę w lemacie Spernera.





Rys. 2. Ilustracja dowodu lematu Spernera.

Lemat Spernera. Narysujmy na płaszczyźnie wielokąt i dokonajmy jego *triangulacji*, czyli podziału na trójkąty, które mogą stykać się z innymi trójkątami wspólną krawędzią lub wspólnym wierzchołkiem (jak na rysunku 1). Wierzchołki tych trójkątów „pokolorujemy", tzn. każdemu z nich przypiszemy jego „kolor" – liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Wyróżnijmy trójkąty, które mają wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Jeśli poruszając się po obwodzie trójkąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara widzimy liczby w kolejności 0, 1, 2, to mamy do czynienia z trójkątem „dodatnio zorientowanym". Oznaczmy liczbę takich trójkątów przez T_+, natomiast liczbę trójkątów „ujemnie zorientowanych" przez T_-.

Interesować nas też będą krawędzie na brzegu wielokąta. Jeżeli wierzchołki takiej krawędzi mają kolory x i y (przy czym kolor x ma wierzchołek, który napotykamy najpierw, gdy poruszamy się po obwodzie wielokąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), to taką krawędź nazwiemy xy. Wyróżnimy krawędzie, które mają kolory 0 i 1. Krawędzie 01 nazwiemy „dodatnio zorientowanymi", natomiast krawędzie 10 będą „ujemnie zorientowane". Ich liczbę oznaczymy, odpowiednio, przez K_+ i K_-.

Ciekawy lemat (znany jako *skierowana wersja lematu Spernera*) podaje zależność między tym, co musi się dziać wewnątrz takiego striangulowanego wielokąta, a tym, co się dzieje na jego brzegu – mianowicie

$$T_+ - T_- = K_+ - K_-. \tag{$\star$}$$

Dowód lematu jest bardzo prosty. Przetnijmy każdą z krawędzi 01 i 10 prostopadłym wektorem (w kierunku takim, jak na rysunku 2) i utwórzmy z tych wektorów graf. Graf ten składa się ze skierowanych ścieżek. Każda ścieżka zaczyna się w ujemnie zorientowanym trójkącie lub na dodatnio zorientowanym odcinku, natomiast kończy się w dodatnio zorientowanym trójkącie lub na ujemnie zorientowanym odcinku. Liczba początków ($T_- + K_+$) musi być równa liczbie końców ścieżek ($T_+ + K_-$), co dowodzi równości ($\star$).

Liczby zespolone. O liczbach zespolonych (ich zbiór będziemy oznaczać przez $\mathbb{C}$) możemy myśleć jak o wektorach (postaci $[a, b]$) na płaszczyźnie. Na liczbach tych możemy wykonywać działania. Dodawanie wykonuje się dokładnie tak samo jak dodawanie wektorów. Aby zdefiniować mnożenie, potrzebne są nam dwa pojęcia. *Argumentem* liczby zespolonej z nazywamy kąt, który tworzy ona z wektorem $[1, 0]$ i oznaczamy go przez $\arg z$. (Argument jest dany z dokładnością do 2π, tzn. jeżeli ϕ jest argumentem z, to $\phi \pm 2\pi$ też. W dalszym ciągu ta niejednoznaczność nie będzie nam przeszkadzała. Przyjmujemy także, że $\arg 0 = 0$.) *Modułem* liczby zespolonej z nazywamy długość wektora reprezentującego z i oznaczamy go przez $|z|$. Łatwo zauważyć, że $\arg z$ i $|z|$ jednoznacznie wyznaczają liczbę z.

Wynikiem mnożenia dwóch liczb z_1 i z_2 jest liczba zespolona z o argumencie $\arg z_1 + \arg z_2$ i module $|z_1| \cdot |z_2|$.

Teraz, gdy umiemy już dodawać i mnożyć, możemy zdefiniować *wielomian* zmiennej zespolonej (analogicznie jak wielomian zmiennej rzeczywistej): wielomianem stopnia n zmiennej zespolonej z będziemy nazywać funkcję $w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ daną wzorem

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

gdzie $a_0, \ldots, a_n$ są liczbami zespolonymi oraz $a_n \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry głosi, że każdy wielomian dodatniego stopnia zmiennej zespolonej ma co najmniej jeden pierwiastek. Jest wiele dowodów tego ważnego twierdzenia, ale lemat Spernera pomoże nam je udowodnić w zaskakująco elementarny sposób.

[*]Instytut Informatyki UW

Rys. 3. Kolorowanie wielomianu z.

Rys. 4. Kolorowanie wielomianu z^2.

Rys. 5. Kolorowanie wielomianu $z^2 - 1$.

Rys. 6. Kolorowanie wielomianu $z^3 - 1$.

Kolorowanie. Ustalmy wielomian $w(z)$. Przez *kolorowanie wielomianu* nazwiemy kolorowanie płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ trzema kolorami 0, 1, 2 w zależności od argumentu liczby zespolonej $w(z)$. Kolor k-ty otrzymają liczby ze zbioru

$$\left\{z \ \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{3} \leqslant \arg w(z) < \frac{2\pi(k+1)}{3}\right\}.$$

Tak pokolorowaną płaszczyznę (rys. 3) oznaczmy przez $\mathbb{C}_{w(z)}$.

Popatrzmy na kilka przykładów. Jeśli wielomian $w(z)$ będzie stopnia 0, to cała płaszczyzna będzie jednokolorowa. Jeśli wielomian będzie postaci $w(z) = z + [a, b]$, to płaszczyzna będzie podzielona na trzy przystające kąty o wspólnym wierzchołku w punkcie $(-a, -b)$. Będzie to wyglądało tak samo jak na rysunku 3, tylko punkt zbiegu kolorów będzie leżał gdzie indziej.

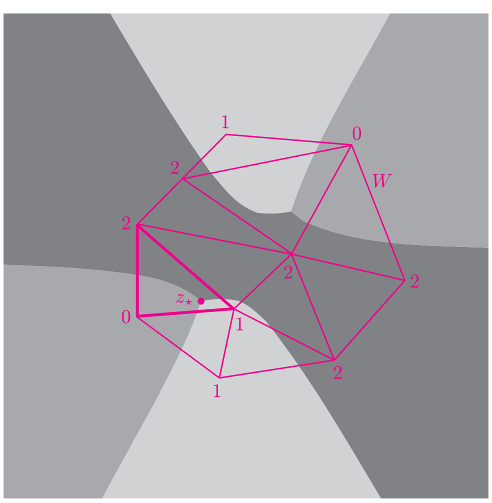
Aby pokolorować wielomian $w(z) = z^2$, sięgniemy do definicji mnożenia liczb zespolonych. Mamy $\arg z^2 = 2 \arg z$, zatem jeśli punkt z dostał kolor 0, to $\frac{2\pi k}{6} \leqslant \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{6}$ lub $\frac{2\pi(k+3)}{6} \leqslant \arg z < \frac{2\pi(k+4)}{6}$. Analogiczne rozumowanie w przypadku kolorów 1 i 2 prowadzi nas do wniosku, że $\mathbb{C}_{z^2}$ jest podzielona na sześć przystających kątów o wierzchołkach w punkcie $(0, 0)$ (patrz rysunek 4).

Nietrudno się przekonać o tym, że kolorując $w(z) = z^n$, będziemy musieli namalować $3n$ przystających kątów. Będą one miały kolejno kolory 0, 1, 2, 0, 1, 2 itd.

Do tej pory szło nam łatwo, ale już w przypadku wielomianu $z^2 - 1$ napotykamy kłopoty. Z pomocą komputera możemy wygenerować kolorowanie tego i innych wielomianów (rysunki 5 i 6, a także okładka). Obserwując obrazki, możemy dojść do dwóch wniosków:
1. Łatwo na rysunku znaleźć zera wielomianu. Są to dokładnie te punkty, w których zbiegają się wszystkie trzy kolory.
2. Niech $w(z)$ będzie wielomianem stopnia n. Im dalej od punktu $(0, 0)$, tym bardziej kolorowanie $w(z)$ przypomina kolorowanie z^n.

Pierwszy z wniosków wynika z ciągłości $w(z)$. Dla dowodu drugiego zauważmy, że przy $|z| \to \infty$ mamy $\frac{w(z)}{z^n} \to a_n$, zatem poza dostatecznie dużym kołem B o środku w punkcie $(0, 0)$ $\mathbb{C}_{w(z)}$ będzie wyglądało prawie jak $\mathbb{C}_{z^n}$.

Wiemy zatem, co się dzieje poza dużym kołem B, tym bardziej wiemy też, co się dzieje poza dowolnym wielokątem wypukłym W zawierającym to koło. Nie wiemy jednak, co się dzieje w jego wnętrzu, ale spróbujemy to odgadnąć, badając jego brzeg. Do tego przyda nam się lemat Spernera. Dokonajmy triangulacji wielokąta W i pokolorujmy jego wierzchołki. Kolorowanie będzie wyznaczone przez $\mathbb{C}_{w(z)}$ (patrz rysunek 7). Jeśli trójkąty są dostatecznie małe, to na brzegu pojawią się tylko krawędzie 00, 01, 11, 12, 22 i 20. Krawędzi 01 jest dokładnie n (znowu przy założeniu dostatecznie drobnej triangulacji), zatem $K_+ = n$.



Rys. 7. Ilustracja dowodu zasadniczego twierdzenia algebry. Kolorowanie wielomianu $z^2 - i$. Poza wielokątem W wielomian wygląda jak z^2.

Analogicznie, brak krawędzi 10 powoduje, że $K_- = 0$ i prawa strona równania $(\star)$ jest równa n. Wynika z tego, że $T_+ \geqslant n$, zatem w wielokącie W istnieje trójkąt trójkolorowy.

Zdefiniujmy teraz taki ciąg triangulacji $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots$, że średnica największego trójkąta w $\mathcal{T}_k$ dąży do 0 przy $k \to \infty$. W triangulacji $\mathcal{T}_k$ znajdziemy trójkolorowy trójkąt o wierzchołkach z_k^0, z_k^1 i z_k^2 (punkt z_k^i ma kolor i). Ponieważ ciąg punktów z_k^0 jest ograniczony przez wielokąt W, więc na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można z niego wybrać podciąg zbieżny $z_{k_l}^0 \to z_\star$. Z tego, co powiedzieliśmy o średnicach, wynika, że podciągi $z_{k_l}^1$ i $z_{k_l}^2$ również są zbieżne do tej samej granicy $z_\star$.

Widać zatem, że w punkcie $z_\star$ zbiegają się wszystkie trzy kolory, zatem $w(z_\star) = 0$, co kończy dowód zasadniczego twierdzenia algebry.