Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
452 ($WT = 3{,}63$) i **453** ($WT = 1{,}23$)
z numeru 2/2008

Jerzy Witkowski	– Radlin	36,24
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	25,68
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	21,89
Krzysztof Magiera	– Łosiów	17,10
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	13,51
Ryszard Woźniak	– Kraków	12,74

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

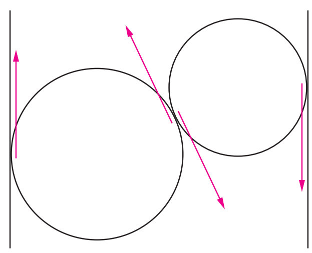
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 464, 465

Redaguje Jerzy B. BROJAN

464. Cienki pierścień o promieniu r jest naładowany równomiernie rozłożonym ładunkiem elektrycznym. W którym miejscu dipol elektryczny (układ dwóch bardzo dużych ładunków położonych w ustalonej, bardzo małej odległości) może pozostawać w równowadze w polu tego pierścienia?

465. W długim przewodniku prostoliniowym, znajdującym się w próżni, płynie prąd o natężeniu I. W polu magnetycznym tego przewodnika porusza się elektron, przy czym w chwili początkowej jego odległość od przewodnika wynosiła r_1, jego prędkość miała wartość v, a kierunek prędkości był równoległy do przewodnika, ze zwrotem zgodnym ze zwrotem prądu. Jaką (maksymalnie) odległość r_2 od przewodnika osiągnie elektron?



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/2008

Przypominamy treść zadań:

460. W jednym naczyniu mamy 150 g wody o temperaturze 100°C, a w drugim naczyniu – 50 g wody o temperaturze 20°C, równej temperaturze otoczenia. Jeśli pozostawimy całą gorącą wodę w pierwszym naczyniu, to po minucie jej temperatura spadnie do 95°C. Chcemy po 5 minutach czekania uzyskać 200 g wymieszanej wody o najniższej możliwej temperaturze. Jak należy postępować – pozostawić całą gorącą wodę w pierwszym naczyniu i wymieszać na końcu, czy część gorącej wody przelać od razu do drugiego naczynia? Jeśli to drugie, to ile wody trzeba przelać na początku? Tempo odpływu ciepła od naczynia do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy temperatur i nie zależy od ilości wody w naczyniu. Pominąć pojemność cieplną samych naczyń.

461. W kubku, którego wewnętrzna powierzchnia jest walcem, znajdują się dwie kule. Suma średnic kul jest większa od wewnętrznej średnicy kubka. Czy możliwe jest, że kule nie wypadną z kubka odwróconego do góry dnem?

460. Pomińmy dla uproszczenia wszystkie jednostki, oznaczmy przez T_2 nadwyżkę temperatury w drugim naczyniu nad otoczeniem, a przez m – masę przelanej na początku gorącej wody. Po przelaniu mamy więc $(50+m)$ wody o nadwyżce temperatury $T_{pocz} = \frac{m\cdot 80}{m+50}$. Zgodnie z podanym założeniem odpływ ciepła w ciągu czasu dt wynosi $\alpha T_2 dt$, a z drugiej strony należy go przyrównać do wyrażenia $-(50+m)c dT_2$, gdzie α – stała, a c – ciepło właściwe. Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest

$$T_2 = T_{pocz}\exp\left(-\frac{\alpha t}{(50+m)c}\right)$$

i analogicznie dla pozostałej części gorącej wody

$$T_1 = 80\exp\left(-\frac{\alpha t}{(150-m)c}\right).$$

Dla samej gorącej wody po 1 minucie nadwyżka wynosiłaby $T_3 = 80\exp(-\alpha/150c)$, a ponieważ jest ona dana ($T_3 = 75°$), więc można ją wprowadzić do powyższych wzorów zamiast nieznanej wielkości α. Po 5 minutach nadwyżki temperatury naczyń będą równe

$$T_2 = T_{pocz}\left(\frac{T_3}{80}\right)^{\frac{150}{50-m}\cdot 5},\qquad T_1 = 80\left(\frac{T_3}{80}\right)^{\frac{150}{150-m}\cdot 5}.$$

Końcowa temperatura całości wynosi

$$20° + (T_2(50+m) + T_1(150-m))/200.$$

Obliczenia numeryczne wykazują, że najniższą wartość tej końcowej temperatury, równą 56,1°C, otrzymamy po przelaniu na początku gorącej wody w ilości $m = 80$ g. Warte odnotowania są następujące fakty, które można uzasadnić nie tylko jako wynik analizy numerycznej:

a) przy zwiększeniu czasu stygnięcia (a pozostałych danych niezmienionych) optymalna ilość przelanej na początku gorącej wody się zmniejsza,

b) gdy stosunek początkowej ilości gorącej wody do ilości zimnej się zmniejsza, optymalna ilość przelanej wody także się zmniejsza, aż przy pewnej wartości tego stosunku okazuje się, że lepiej jest jej nie przelewać wcale.

461. Nie jest to możliwe. Aby się o tym przekonać, wystarczy rozważyć siły styczne (tarcia), działające na kule (rysunek). Równowaga każdej z kul ze względu na obroty wymaga, aby dwie działające na nią siły styczne miały jednakowe wartości (z przeciwnym momentem względem środka), natomiast z III zasady dynamiki wynika jednakowa wartość tych sił dla obu kul. Jak widać z rysunku, zwroty sił tarcia działających ze strony ścian byłyby przeciwne, co oznacza brak wypadkowej siły pionowej mogącej równoważyć ciężar kul.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **555** ($WT = 1{,}72$) i **556** ($WT = 1{,}95$) z numeru 2/2008

Jerzy Cisło	– Wrocław	47,39
Tomasz Tkocz	– Rybnik	45,40
Jerzy Olszewski	– Suwałki	41,06
Jerzy Witkowski	– Radlin	40,56
Marek Prauza	– Poraj	39,95

Sześć pełnych okrążeń – to podwójna norma Weterana. Jerzy Cisło jest siódmym uczestnikiem Ligi, który taką dubeltową normę wypełnił.

Zaś Tomasz Tkocz jest nowym (110.) członkiem Klubu 44 (M).

Zadania z matematyki nr 567, 568

Redaguje Marcin E. KUCZMA

567. Dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 2$ wyznaczyć wszystkie pary (a, b) liczb rzeczywistych, dla których istnieje funkcja ciągła $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, spełniająca równanie

$$\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n} = ax + b \quad \text{dla} \quad x \in \mathbf{R}.$$

568. Niech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ oraz m będą liczbami całkowitymi większymi od 1. Zakładamy, że liczba m jest względnie pierwsza z każdą z liczb k_i. Wykazać, że równanie

$$x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_n^{k_n} = y^m$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y.

Zadanie 568 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/2008

Przypominamy treść zadań:

563. Liczby całkowite $k,\ m,\ n$ spełniają równanie

$$\frac{m}{n} = \frac{k^2 + m^2}{k^2 + n^2}$$

oraz warunek: $k^2 + m^2 + n^2$ jest liczbą pierwszą. Dowieść, że $m = n$.

564. W prostokącie o bokach długości a, b poprowadzono skończoną liczbę odcinków równoległych do jego boków. Odcinki mogą się przecinać, żaden nie zawiera się w boku prostokąta, a suma ich długości jest równa d. Udowodnić, że wśród części, na które odcinki dzielą prostokąt, istnieje taka, której pole jest nie mniejsze niż

$$\left(\frac{2ab}{a+b+d}\right)^2.$$

563. Niech liczby $k,\ m,\ n$ oraz $p = k^2 + m^2 + n^2$ spełniają zadane warunki. W równaniu mamy w mianowniku liczbę $n \neq 0$. Również $m \neq 0$ (bo dla $m = 0$ dostajemy $k = 0,\ p = n^2$, sprzeczność). Przekształcamy równanie do postaci

$$(mn - k^2)(n - m) = 0.$$

Przypuśćmy, że $m \neq n$. Wówczas $mn = k^2$, skąd

$$p = m^2 + mn + n^2 = (m+n)^2 - mn = (m+n)^2 - k^2 = \\ = (m+n-k)(m+n+k).$$

Liczba p jest pierwsza, więc jeden z czynników ostatniego iloczynu musi być równy $\pm p$. Ale

$$|m + n \pm k| \leqslant |m| + |n| + |k| \leqslant m^2 + n^2 + k^2 = p$$

i w konsekwencji każda z tych nierówności słabych musi być równością. To znaczy, że $|m| = |n| = |k| = 1$. Skoro zaś $mn = k^2 > 0$, to $m = n\ (= \pm 1)$. Przypuszczenie, że $m \neq n$, doprowadziło do sprzeczności.

564. Poprowadzone odcinki dzielą prostokąt na wielokąty $W_1, \ldots, W_n$ o bokach poziomych i pionowych; przy tym niektóre fragmenty tych odcinków mogą znajdować się we wnętrzach wielokątów W_i, nie rozcinając ich. Odrzućmy te fragmenty z rozważań i oznaczmy przez e sumę długości pozostałych części odcinków; oczywiście $e \leqslant d$.

Przyjmijmy, że wielokąt W_i ma pole S_i oraz obwód p_i. Mamy równość

$$\sum p_i = 2a + 2b + 2e,$$

bowiem długości odcinków (tych ich fragmentów, które pozostały w rozważaniach) wchodzą do tej sumy dwukrotnie, a długości boków prostokąta – tylko raz. Niech $2x_i$ będzie długością poziomej części obwodu wielokąta W_i, a $2y_i$ długością części pionowej. Wielokąt W_i można nakryć prostokątem o wymiarach $x_i \times y_i$. Zatem $S_i \leqslant x_i y_i \leqslant (x_i + y_i)^2/4$. Stąd $x_i + y_i \geqslant 2\sqrt{S_i}$, wobec czego

$$a + b + d \geqslant a + b + e = \frac{1}{2}\sum p_i = \sum (x_i + y_i) \geqslant \\ \geqslant 2\sum \sqrt{S_i}.$$

Niech S_m będzie polem największego z wielokątów W_i. Wówczas

$$ab = \sum S_i = \sum \sqrt{S_i} \cdot \sqrt{S_i} \leqslant \sqrt{S_m} \cdot \sum \sqrt{S_i} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{S_m} \cdot \frac{a+b+d}{2},$$

i ostatecznie

$$S_m \geqslant \left(\frac{2ab}{a+b+d}\right)^2.$$