Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
450 ($WT = 3{,}25$) i **451** ($WT = 1{,}15$)
z numeru 1/2008

Radosław Poleski	– Kołobrzeg	21,89
Krzysztof Magiera	– Łosiów	16,00

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z fizyki nr 462, 463

Redaguje Jerzy B. BROJAN

462. Dwa statki spoczywają obok siebie na morzu. Jeśli nie ma żadnego wiatru ani prądów wody, to czy oddziaływanie grawitacyjne spowoduje zbliżenie się statków (choćby bardzo powolne)? Czy odpowiedź może zależeć od rozkładu masy wewnątrz statków?

463. Kulisty balonik zawiera lekki gaz i dzięki temu unosi się w powietrzu w stanie równowagi. Jego powłoka rozciąga się sprężyście, a energia sprężystości jest proporcjonalna do powierzchni balonika (wtedy nadwyżka ciśnienia we wnętrzu jest odwrotnie proporcjonalna do promienia balonika – faktu tego nie trzeba dowodzić). Jak zareaguje balonik - uniesie się do góry, opadnie, czy pozostanie w równowadze – gdy temperatura wzrośnie, pozostając jednakowa wewnątrz i na zewnątrz? Jak zareaguje na wzrost ciśnienia zewnętrznego? Jaki powinien być związek między temperaturą a ciśnieniem zewnętrznym, aby przy ich zmianie balonik pozostawał w równowadze? Powłoka jest cienka, a jej właściwości sprężyste nie zmieniają się z temperaturą.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2008

Przypominamy treść zadań:

458. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0{,}208\,\mathrm{T}$ biegną elektrony po linii śrubowej (helisie). Rzut helisy na płaszczyznę prostopadłą do pola jest okręgiem o promieniu $r = 0{,}755\,\mathrm{mm}$, a częstotliwość krążenia po tym okręgu wynosi $f = 5{,}77\,\mathrm{GHz}$. Ile wynosi skok helisy? Jaka jest dokładność wyniku, jeśli każda z podanych wielkości jest znana z dokładnością do jedności w ostatniej podanej cyfrze? Masę i ładunek elektronu wziąć z tablic.

458. Z przyrównania siły Lorentza do siły dośrodkowej wynika wzór na częstotliwość krążenia elektronu

$$f = \frac{eB}{2\pi m_r} = \frac{eB}{2\pi m}\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

gdzie m_r jest „masą relatywistyczną” (termin często spotykany, lecz chyba niezupełnie poprawny). Stąd

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 = c^2\left(1 - \left(\frac{2\pi f m}{eB}\right)^2\right),$$

gdzie oznaczyliśmy prostopadłą do pola składową prędkości jako v_1, a równoległą jako v_2. Dana wartość promienia helisy r pozwala wyznaczyć składową $v_1 = 2\pi f r$. Skok helisy s jest dany wzorem $s = v_2 T = v_2/f$. Podstawiając v_2 z powyższych wzorów, otrzymujemy

$$s = \sqrt{\left(\frac{c}{f}\right)^2\left(1 - \left(\frac{2\pi f m}{eB}\right)^2\right) - (2\pi r)^2}\,.$$

Przyjmując $m = 9{,}108 \cdot 10^{-31}$ kg oraz $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, znajdujemy s w granicach od zera do około 8 mm – minimalną wartość otrzymujemy w wyniku podstawienia $B = 0{,}207$ T, $f = 5{,}78$ GHz, a maksymalną dla przeciwnych odchyleń. Dokładność wyniku jest bardzo niska, gdyż dana wartość f jest tylko nieznacznie mniejsza od wartości nierelatywistycznej 5,82 GHz (otrzymanej z podstawienia $m_r = m$), co w końcowym wzorze znajduje odbicie w tym, że odejmujemy od jedności wielkość nieznacznie od niej mniejszą.

459. Nad cieczą dielektryczną na wysokości H umieszczono ładunek punktowy, a w wyniku tego poziom cieczy pod ładunkiem podniósł się na wysokość h (przy czym $h \ll H$). Na jaką wysokość podniesie się poziom cieczy, gdy podwoimy H? Rozmiary naczynia są duże, tak że z dala od ładunku poziom cieczy pozostaje stały. Można przyjąć założenie upraszczające: pole nad cieczą jest takie, jakby wszędzie wokół ładunku było tylko powietrze, a pole w cieczy – takie, jakby cała przestrzeń była nią wypełniona.

459. Zgodnie z przyjętym założeniem wielkość $D = \varepsilon_0\varepsilon_r E$ nie zależy od tego, jaką część przestrzeni zajmuje ciecz, i pozostaje równa

$$D = Q/r^2$$

(a w obszarze istotnym dla powstania „górki” jest równa Q/H^2). Energia pola elektrycznego na jednostkę objętości wynosi

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{D}{2\varepsilon_0\varepsilon_r},$$

zatem wprowadzenie cieczy o stałej dielektrycznej ε_r powoduje zmniejszenie tej energii o wielkość proporcjonalną do kwadratu D. Objętość „górki”, przez którą należy pomnożyć powyższe wyrażenie, jest proporcjonalna do h^3 (dalsze wnioski będą zresztą słuszne dla dowolnej zależności potęgowej). Z drugiej strony, wzrost energii grawitacyjnej cieczy jest równy tej objętości pomnożonej przez $\rho g h/2$ (jeśli środek masy „górki” jest na wysokości $h/2$; wartość ułamka 1/2 znów nie ma istotnego znaczenia) – zatem proporcjonalny do h^4. Całkowita energia E_c zależy więc od h zgodnie ze wzorem

$$E_c(h) = Ah^4 - Bh^3.$$

Ustalenie wysokości h wynika z warunku minimum całkowitej energii, skąd otrzymujemy, że h jest proporcjonalne do B. Z kolei B jest proporcjonalne – jak napisaliśmy wyżej – do kwadratu D, czyli do $1/H^4$. Podwojenie H spowoduje 16-krotny spadek wartości h.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2008

Zadania z matematyki nr 565, 566

Redaguje Marcin E. KUCZMA

565. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EAD|$, $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle EDA|$, przy czym $|AB| > |AE|$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P; przekątne AD i CE przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że odcinki AP i AQ mają jednakową długość wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta ACD jest średnią geometryczną pól trójkątów ABC i ADE.

566. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 3 i niech $n = (4^p - 1)/3$. Wykazać, że liczba $2^{n-1} - 1$ jest podzielna przez n.

Zadanie 566 zaproponował pan Paweł Najman z Jaworzna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2008

Przypominamy treść zadań:

561. Ciąg nieskończony $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym

$$4a_{n+1} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots\ ;$$

wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(-1; 1)$. Wykazać, że szereg nieskończony $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Czy jego suma jest liczbą wymierną? (odpowiedź może zależeć od a_0).

562. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD, wewnątrz trójkąta ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B, D, F przecina bok AB w punkcie E. Dowieść, że

$$|CD| \cdot |EF| + |DF| \cdot |AE| = |BD| \cdot |AF|.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
553 ($WT = 1{,}51$) i **554** ($WT = 1{,}87$)
z numeru 1/2008

Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	45,47
Paweł Kubit	– Kraków	44,26
Jerzy Cisło	– Wrocław	43,72
Tomasz Tkocz	– Rybnik	41,73
Marek Prauza	– Poraj	38,23
Jerzy Olszewski	– Suwałki	37,39
Jerzy Witkowski	– Radlin	36,89

Grzegorz Karpowicz – nowa twarz w Klubie 44. Paweł Kubit zaś zalicza czwartą rundę.

561. Liczby $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, czyli sumy częściowe rozpatrywanego szeregu, spełniają zależność rekurencyjną $4(s_{n+1} - s_n) = s_n^2 - 1$, którą przepisujemy jako

$$s_{n+1} = f(s_n),$$

gdzie

$$f(x) = x + \frac{x^2 - 1}{4}.$$

Należy wykazać zbieżność ciągu (s_n).

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(-2, -5/4)$, przechodząca przez punkty $(-1, -1)$ i $(1, 1)$. Funkcja wypukła f jest więc na przedziale $\langle -1; 1\rangle$ rosnąca i odwzorowuje ten przedział w siebie, a jej wykres wewnątrz tego przedziału leży poniżej prostej $y = x$:

$$x \in (-1; 1) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in (-1; 1), \quad f(x) < x.$$

Skoro $s_0 = a_0 \in (-1; 1)$, to z równości $s_{n+1} = f(s_n)$ przez indukcję wynika, że wszystkie liczby s_n leżą w przedziale $(-1; 1)$, a przy tym $s_{n+1} < s_n$. Zatem ciąg (s_n) jest malejący i ograniczony, więc zbieżny. Jego granica s musi spełniać równanie $s = f(s)$ wraz z oszacowaniem $s < a_0 < 1$. Jedyną taką liczbą jest $s = -1$ (wartość niezależna od a_0) – liczba wymierna.

562. Niech K będzie drugim (poza F) punktem przecięcia prostej AF z okręgiem przechodzącym przez punkty B, D, F; leży on po przeciwnej stronie prostej BD niż punkt F, więc $|\sphericalangle KBD| = |\sphericalangle KFD|$. Czworokąt $AFDC$ jest wpisany w okrąg; zatem $|\sphericalangle KFD| = |\sphericalangle ACD|$. Z uzyskanych zależności wynika, że $BK \| AC$, co daje równość pól $[ABC] = [AKC]$. Stąd

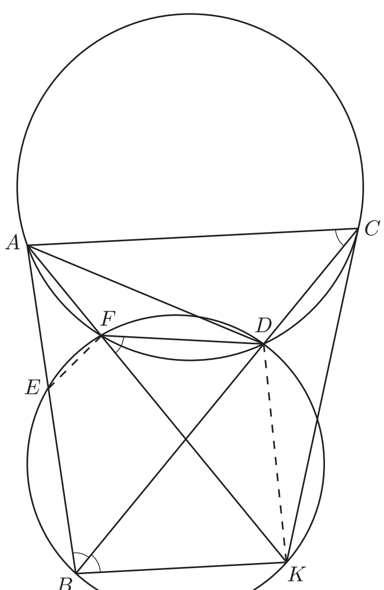
$$[ABC] - [ADC] = [AKC] - [ADC],$$

czyli

$$[ABD] = [ADK] + [CDK]$$

– czyli

$$|BA| \cdot |BD| \cdot \sin ABD = |AK| \cdot |FD| \cdot \sin KFD + |CD| \cdot |BK| \cdot \sin KBC.$$



Występujące w ostatniej równości kąty są równe, więc ich sinusy stanowią wspólny czynnik, który można opuścić.

Okrąg opisany na czworokącie $BKFE$ wyznacza wraz z siecznymi AB i AK parę trójkątów podobnych: $\triangle AEF \sim \triangle AKB$. Otrzymujemy proporcje

$$\frac{|AF|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AK|} = \frac{|EF|}{|KB|}.$$

Mnożymy poprzednią równość (już bez sinusów) przez wspólną wartość tych trzech ilorazów i dostajemy tezę zadania:

$$|AF| \cdot |BD| = |AE| \cdot |FD| + |CD| \cdot |EF|.$$