Inwestowanie na giełdzie, czyli czy warto mierzyć ryzyko?

Mariusz BARYŁO[*]

Zapewne każdy z Czytelników byłby w stanie wytłumaczyć, co intuicyjnie rozumie pod pojęciem ryzyka. Jeżeli jednak zapytalibyśmy, jak to ryzyko zmierzyć, to okaże się, że nie jest wcale łatwo udzielić na to pytanie prostej odpowiedzi (chyba że Czytelnik już o którymś ze sposobów mierzenia ryzyka słyszał). Naukowcy od lat zajmują się tym problemem i wciąż powstają coraz to nowsze i bardziej wyrafinowane miary ryzyka.

Oczywiście najpierw musimy sprecyzować, jakim konkretnie ryzykiem chcemy się zajmować. Innym rodzajem ryzyka jest np. ryzyko związane ze spadkiem kursu akcji, a zupełnie innym ryzyko bankructwa firmy i zapewne różnymi metodami należałoby próbować te ryzyka szacować.

Aby zapoznać się z jednym ze sposobów mierzenia ryzyka, rozważmy następujący przykład. Wyobraźmy sobie, że Ania proponuje nam grę (nazwijmy ją grą A) polegającą na tym, iż rzucamy raz symetryczną (uczciwą) monetą i jeśli wypadnie orzeł, to dostajemy złotówkę, natomiast jeśli wypadnie reszka, to my płacimy Ani złotówkę. Jest to tzw. gra sprawiedliwa, gdyż szanse wygranej Ani i nasze są równe. Czytelnik zapewne zgodziłby się po krótkim namyśle zagrać z Anią w taką grę – widać, że możemy się wzbogacić o złotówkę, a jeśli nawet przegramy, to nic szczególnie strasznego się nie stanie. Stracimy przecież tylko złotówkę! Możemy więc śmiało powiedzieć, że gra proponowana przez Anię jest mało ryzykowna.

Mówiąc nieco inaczej, średnia wygrana w tej grze jest równa zeru. Zajmiemy się tą kwestią poniżej.

Dość podobną grę proponuje nam Bartek (nazwijmy ją grą B). Również rzucamy raz symetryczną monetą i jeśli wypadnie orzeł, to dostajemy 1000 zł, jeśli zaś wypadnie reszka, to 1000 zł płacimy Bartkowi. I ta gra jest sprawiedliwa – przecież szanse wygranej są dla każdego z grających takie same! Czy jednak Czytelnik zgodziłby się na zagranie w taką grę, gdyby nawet Bartek bardzo nalegał?

Podejrzewam, że nie! Zadajmy sobie więc pytanie, dlaczego? Co różni te gry? Co sprawia, że jedna z nich wydaje się „niegroźna”, w drugą zaś zagralibyśmy już bardzo niechętnie? Bez wątpienia czujemy, że gra proponowana przez Bartka niesie ze sobą dużo większe RYZYKO – możemy co prawda wiele zyskać, ale również bardzo dużo stracić. Jak jednak porównać ryzyka, wiążące się z tymi grami? Wyznaczmy najpierw średnie wygrane w każdej z gier. Wygrana w grze A jest zmienną losową (oznaczmy ją przez X), przyjmującą dwie wartości: 1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (jest to szansa wyrzucenia orła w rzucie symetryczną monetą) oraz -1 (stratę rozumiemy jako ujemną wygraną) również z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (szansa wyrzucenia reszki). Zatem średnia wygrana w tej grze będzie wartością oczekiwaną zmiennej losowej, oznaczającej wygraną w grze A. Wynosi więc ona $EX = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$. Analogicznie wyznaczamy średnią wygraną w grze B. Jest to wartość oczekiwana zmiennej losowej Y, przyjmującej wartość 1000 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ oraz wartość -1000 również z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Zatem $EY = \frac{1}{2}\cdot 1000 + \frac{1}{2}\cdot(-1000) = 0$. Widzimy stąd, że wielkość średniej wygranej nie rozróżnia w żaden sposób naszych gier (mówi ona tylko, jak już wcześniej zaznaczyłem, że obie gry są sprawiedliwe). Kolejną miarą, odnoszącą się do zmiennych losowych, jest wariancja. Jest to jedna z tzw. *miar rozproszenia*. Obliczymy teraz wariancję wygranej w grze A. Jest ona równa $D^2X = \frac{1}{2}\cdot(1-0)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1-0)^2 = 1$. Wariancja wygranej w grze B wynosi zaś $D^2Y = \frac{1}{2}\cdot(1000-0)^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1000-0)^2 = 1\,000\,000$. Mamy więc coś, co wyraźnie odróżnia nasze gry! Gra A ma wariancję malutką, gra B zaś olbrzymią. Jednak po chwili refleksji widzimy, że wariancja, jak na miarę ryzyka związanego z naszymi grami, jest nieco „przesadna”. Gdyby wyciągnąć pierwiastek z wariancji wygranych, otrzymalibyśmy tzw. *odchylenie standardowe* (oznacza się je symbolem DX lub $\sigma(X)$), wynoszące odpowiednio 1 i 1000. Widzimy więc, że jest to w naszym przypadku całkiem niezła miara ryzyka! Nie dość, że dla mało ryzykownej

Wartość oczekiwana EX zmiennej losowej X o rozkładzie dyskretnym, czyli przyjmującej np. skończenie wiele wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z prawdopodobieństwami wynoszącymi odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_n$, gdzie $p_i \geqslant 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

jest równe

$$EX = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n.$$

Wariancja D^2X zmiennej losowej X przyjmującej skończenie wiele wartości $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z prawdopodobieństwami wynoszącymi odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (spełniającymi te same założenia, co przy opisie wartości oczekiwanej) jest wartością oczekiwaną kwadratu odchylenia zmiennej losowej od jej wartości średniej i jest równe $D^2X = E(X-EX)^2 = p_1(x_1-EX)^2 + p_2(x_2-EX)^2 + \ldots + p_n(x_n-EX)^2$. Wariancję zmiennej losowej X oznacza się też często symbolem $\sigma^2(X)$.

[*]Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

gry A przyjmuje małą wartość, a dla bardzo ryzykownej dużą, to jeszcze te wartości są akurat równe możliwej stracie lub zyskowi (tak dobrze jest tylko dla tak prostej gry symetrycznej).

Mieliśmy się jednak zajmować giełdą i ryzykiem tam występującym, zatem czas przejść do ryzyka, związanego z akcjami. Każdy, kto słyszał o giełdzie, wie, że najbardziej typowym zajęciem inwestorów jest kupowanie i sprzedawanie akcji wybranych spółek, notowanych na giełdzie. Inwestorzy starają się to robić w ten sposób, aby oczywiście zyskać możliwie dużo. Niektórzy obserwują tylko zmiany kursów akcji i starają się wybierać takie spółki, które np. w ostatnim czasie zaczynają zyskiwać na wartości i mają nadzieję, że ta tendencja będzie się utrzymywała w najbliższej przyszłości; inni czekają na moment, kiedy akcje jakiejś spółki znacznie spadną i je kupują, licząc na wzrost ich wartości... Są to najprostsze sposoby, wymagające jedynie obserwacji zmian *stóp zwrotu*. Oczywiście, wymyślono rozmaite sposoby przewidywania, kiedy warto daną akcję kupić, a kiedy sprzedać (są to metody należące do tzw. *analizy technicznej*). My jednak przyjrzymy się jeszcze innemu podejściu do inwestowania na giełdzie. Będzie to spojrzenie na akcje nie tylko pod kątem stopy zwrotu, ale uwzględniające też ryzyko.

Jeżeli na początku ustalonego okresu dana akcja miała notowanie C_p, a na końcu C_k, to stopą zwrotu w tym okresie nazywa się stosunek zysku (może on być ujemny!) z zakupu tej akcji do początkowego jej kursu (zakładamy, że kursy uwzględniają już ewentualne wypłacane dywidendy). Stopa zwrotu jest zatem równa $R = \frac{C_k - C_p}{C_p}$. Warto zauważyć, że stopa zwrotu może mieć wartość dowolnie dużą, jednak najmniejszą jej wartością jest -1, co odpowiada sytuacji, gdy notowanie akcji na końcu interesującego nas okresu wyniesie 0, czyli stracimy wszystkie zainwestowane pieniądze.

Jakie ryzyko wiąże się z zakupem akcji? Oczywiście, niebezpieczeństwo spadku ich wartości! Nasuwa się więc pytanie, jak można by zmierzyć to ryzyko? Przypomnijmy sobie, jak wyglądała sytuacja z grami, proponowanymi przez Anię i Bartka. Ryzykowna była ta gra, która charakteryzowała się dużą potencjalną stratą, czyli dla której odchylenie możliwych wyników gry od wartości średniej było duże. Podobnie rzecz się ma z akcjami: za bardziej ryzykowną uznamy tę, która wykazywała w przeszłości większe wahania, gdyż występuje wówczas większe niebezpieczeństwo, że również i teraz, po jej zakupie, zmieni ona gwałtownie swą wartość (oczywiście, dla kupującego groźny jest tylko spadek wartości akcji; niespodziewany duży wzrost jest tylko miłą niespodzianką...). Może więc spróbowalibyśmy użyć poznanej przez nas miary ryzyka – odchylenia standardowego – również i do oceny ryzyka inwestowania w akcje? Okazuje się, że jest to nienajgorszy pomysł i często tak właśnie się postępuje. W tym celu należy najpierw wybrać pewien interesujący nas okres historyczny (np. tydzień, miesiąc, kwartał, rok, pięć lat, itp.). Potem oszacować tzw. *oczekiwaną stopę zwrotu* na podstawie danych historycznych o stopach zwrotu w poszczególnych chwilach (np. dniach, tygodniach, itp.) wybranego okresu. Teraz możemy już obliczać ryzyko akcji, rozumiane jako odchylenie standardowe stóp zwrotu.

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych n stóp zwrotu, wynoszących kolejno $R_1, R_2, \ldots, R_n$, to oczekiwaną stopę zwrotu z inwestycji w daną akcję w tym okresie liczymy jako wartość oczekiwaną zmiennej losowej, przyjmującej n wartości $R_1, \ldots, R_n$ z równymi prawdopodobieństwami $\frac{1}{n}$. Czytelnicy znający podstawowe pojęcia statystyki matematycznej zauważą, że jest to oczywiście tzw. *estymator nieobciążony* wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Mamy więc wzór $\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$ (mówiąc prościej, historyczna oczekiwana stopa zwrotu jest zwykłą średnią arytmetyczną poszczególnych stóp zwrotu). Odchylenie standardowe stóp zwrotu szacujemy zaś ze wzoru

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n} (R_t - \overline{R})^2},$$

gdzie $\overline{R}$ jest wyznaczoną wcześniej oczekiwaną stopą zwrotu (jest to jeden z kilku używanych estymatorów odchylenia standardowego).

Załóżmy, że w przeciągu ostatnich dwóch miesięcy cotygodniowe dane na temat kursów dwóch spółek kształtowały się następująco.

X	21,60	22,12	20,10	22,40	24,90	25,65	25,10	26,75
Y	22,40	23,60	23,90	23,45	23,10	22,95	23,80	25,70

Możemy wyznaczyć więc stopy zwrotu w kolejnych tygodniach. Obliczamy je tak, jak to zostało wcześniej opisane, np. stopa zwrotu dla spółki X w pierwszym tygodniu wynosi $R_1 = \frac{22{,}12 - 21{,}60}{21{,}60} = 0{,}024074$, itd. W ten sposób dostajemy ciąg tygodniowych stóp zwrotu dla obu spółek (podajemy je w procentach, jak się to zwykle robi)

X	2,4074	−9,1320	11,4428	11,1607	3,0120	−2,1443	6,5737
Y	5,3571	1,2712	−1,8829	−1,4925	−0,6494	3,7037	7,9832

Oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki X w wybranym przez nas okresie dwóch miesięcy wynosi więc $3,3315\%$ (jest to średnia arytmetyczna liczb z pierwszego wiersza powyższej tabeli). Natomiast ryzyko tej inwestycji (rozumiane jako odchylenie standardowe stóp zwrotu) wynosi

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{7-1} \cdot \sum_{t=1}^{7} (R_t - 0,033315)^2},$$

gdzie za R_t wstawiamy kolejne stopy zwrotu w poszczególnych tygodniach. Wynosi ono 7,3471%. Oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w akcje spółki Y

w wybranym przez nas okresie dwóch miesięcy wynosi zaś 2,0415%, a ryzyko liczone analogicznie jak w poprzednim przypadku jest równe 3,7591%. Widzimy więc, że co prawda w wybranym przez nas historycznym okresie inwestycyjnym akcje spółki X miały większą stopę zwrotu niż akcje spółki Y, jednak odchylenie standardowe stóp zwrotu akcji spółki X jest większe. Do inwestora więc należy decyzja, czy wybrać akcje, charakteryzujące się większą historyczną stopą zwrotu, ale i większym ryzykiem, czy też zgodzić się na nieco mniejszą stopę zwrotu w zamian za mniejsze ryzyko. Niestety, w rzeczywistości tak właśnie najczęściej bywa – im wyższe stopy zwrotu osiągane przez akcje, tym większe ryzyko się z nimi wiąże. Na szczęście istnieją metody porównywania i wyboru walorów „lepszych” w pewnym określonym sensie, jednak w tym artykule nie będziemy się już nimi zajmować ... Zastanówmy się jednak nad powiązaniem ryzyka inwestowania w akcje z odchyleniem standardowym stopy zwrotu. Wiadomo, że odchylenie standardowe jest tym większe, im większe jest odchylenie poszczególnych stóp zwrotu od ich wartości średniej. Niezależnie od tego, czy jest to odchylenie w górę czy w dół! Dla inwestora, jak już wcześniej wspomniałem, niebezpieczne jest tylko odchylenie w dół (spadek kursu akcji), a odchylenie w górę jest wręcz korzystne! Nie należałoby więc go chyba doliczać do wyrażenia, mającego mierzyć ryzyko ... To właśnie rozumowanie uzasadnia sensowność wprowadzenia nowej miary ryzyka, zwanej *semiodchyleniem standardowym.* Jeżeli teraz obliczymy semiodchylenia standardowe w naszym przypadku, to wyniosą one: 5,5719% dla stopy zwrotu spółki X oraz 2,4401% dla stopy zwrotu spółki Y. Widzimy więc, że w nowym sensie inwestycja w akcje spółki X również niesie ze sobą większe ryzyko (jednak odpowiednie wielkości są mniejsze, gdyż uwzględniliśmy przy mierzeniu ryzyka jedynie spadki kursu akcji).

Jeżeli w wybranym okresie historycznym mamy wyznaczonych n stóp zwrotu, wynoszących kolejno $R_1, R_2, \ldots, R_n$, to semiodchylenie standardowe stopy zwrotu z inwestycji w daną akcję w tym okresie obliczamy ze wzoru

$$\sigma^- = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{t=1}^{n}\left(\left(R_t-\overline{R}\right)^-\right)^2},$$

gdzie $\overline{R}$ jest wyznaczoną wcześniej oczekiwaną stopą zwrotu, zaś

$$(R_t-\overline{R})^- = \begin{cases} R_t-\overline{R} & \text{gdy } R_t-\overline{R}<0,\\ 0 & \text{gdy } R_t-\overline{R}\geqslant 0.\end{cases}$$

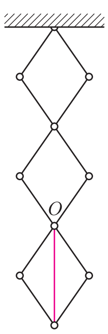
Okazuje się, że można wprowadzać wiele rozmaitych miar ryzyka, kładących nacisk na różne aspekty samego pojęcia ryzykowności. Nie istnieje w związku z tym jedna, uniwersalna i dobra we wszystkich zastosowaniach miara ryzyka. Widzimy jednak, iż należy podczas inwestowania zwracać uwagę nie tylko na osiągane stopy zwrotu, ale i na ryzyko z tymi wynikami związane. Jeden z działów matematyki finansowej, zwany analizą portfelową, zajmuje się właśnie, między innymi, problemem wyboru inwestycji w takie walory, by (przy uwzględnieniu pewnych zależności między tymi walorami) uzyskać możliwie dużą stopę zwrotu przy możliwie minimalnym ryzyku. Jak jednak takiego wyboru dokonać, to już temat na osobną opowieść...

Obszerne (i dość zaawansowane od strony matematycznej) omówienie znanych miar ryzyka zawiera praca *Choosing a Right Measure of Risk: A survey*, Christian S. Pedersen, Stephen E. Satchell, 1999, do której odsyłam Czytelników, którym nieobce jest pojęcie całki.

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 723. Rozkładane zawieszenie na lampkę (rys. 1), które ma ciężar Q, jest zbudowane z jednorodnych prętów, połączonych przegubowo. Wyznaczyć siłę naprężenia nici rozpiętej między punktami O i M.
Rozwiązanie na str. 17



Rys. 1

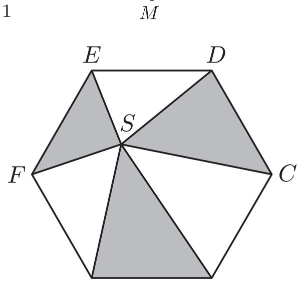
F 724. Kula drewniana o masie M leży na cienkiej podstawce. Lecący z dołu pionowo do góry pocisk o masie m oraz chwilowej prędkości v trafia kulę centralnie i przebija ją. Kula unosi się przy tym na wysokość h. Na jaką wysokość nad podstawkę wzniesie się pocisk?
Rozwiązanie na str. 18

Redaguje Waldemar POMPE

Poniższe zadania pochodzą z III Olimpiady Gimnazjalistów.

M 1216. Czy można tak przeciąć sześcian płaskim cięciem na dwie bryły o równych objętościach, aby w przekroju otrzymać pięciokąt? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie na str. 8

M 1217. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$ (rys. 2). Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.
Rozwiązanie na str. 19



Rys. 2

M 1218. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie na str. 18