Zbiory niemierzalne *Piotr ZAKRZEWSKI*[*]

Korzenie teorii miary sięgają tak podstawowych pojęć, jak długość (np. odcinka), pole (np. koła) i objętość (np. kuli). Wraz z rozwojem matematyki konieczne stało się uogólnienie tych pojęć w taki sposób, żeby dało się „zmierzyć” coraz bardziej skomplikowane podzbiory danej przestrzeni – na przykład prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$, do której w tym artykule ograniczymy nasze rozważania. Takie uogólnienie, czyli właśnie miara, ma więc być funkcją m, określoną na pewnej rodzinie $\mathcal{A}$ podzbiorów prostej (tych, które z jej pomocą dadzą się „zmierzyć”) i przypisującą im wartości rzeczywiste nieujemne oraz $+\infty$. Oczywiście, chcielibyśmy przy tym, żeby mało skomplikowane zbiory, np. odcinki, należały do rodziny $\mathcal{A}$ i miara m przypisywała im ich długości. Ponadto, miara zbioru nie powinna zależeć od jego położenia na prostej, tzn. miara zbioru nie powinna się zmienić po jego przesunięciu; mówimy wówczas, że m jest *niezmiennicza na przesunięcia.* Wreszcie, miara sumy dwóch rozłącznych zbiorów powinna być równa sumie ich miar; mówimy wówczas, że funkcja m jest *skończenie addytywna.* Z uwagi na zastosowania w teorii całki i rachunku prawdopodobieństwa żąda się od miary więcej: miara sumy dowolnego ciągu zbiorów, z których każde dwa są rozłączne (czyli zbiorów *parami rozłącznych*), równa jest sumie miar tych zbiorów; tę własność miary nazywamy *przeliczalną addytywnością.*

W roku 1902 Lebesgue wprowadził pojęcie miary, powszechnie uznawane za satysfakcjonujące narzędzie, pozwalające „mierzyć” zbiory, pojawiające się w analizie matematycznej. *Miara Lebesgue'a* określona jest na rodzinie $\mathcal{L}$ *zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a*, która jednak nie obejmuje wszystkich podzbiorów prostej: istnieją zbiory *niemierzalne w sensie Lebesgue'a.* Co więcej – i to jest znacznie bardziej zaskakujące – dla dowolnej miary m o dziedzinie $\mathcal{A}$ (spełniającej powyższe warunki) istnieje zbiór taki $A \subseteq \mathbb{R}$, że $A \notin \mathcal{A}$.

Przykładem zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a jest tzw. *zbiór Vitaliego.* Ma on dokładnie jeden element wspólny z każdym przesunięciem $t + \mathbb{Q}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.

Wynika to z następującego twierdzenia o paradoksalnym rozkładzie przedziału, udowodnionego przez Banacha i Tarskiego w roku 1924. *Przedział* $[0,1]$ *można podzielić na parami rozłączne zbiory* $A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots$ *w taki sposób, że pewne ich przesunięcia* $t_0 + A_0,\ t_1 + A_1,\ t_2 + A_2,\ldots$ *też są parami rozłączne i w sumie dają przedział* $[0,2]$. Oczywiście, takie „cudowne podwojenie długości” nie byłoby możliwe, gdyby wszystkie zbiory A_i należały do $\mathcal{A}$ – co najmniej jeden z nich jest więc *niemierzalny względem* m.

Gdyby wszystkie zbiory A_i należały do $\mathcal{A}$, to uzyskalibyśmy sprzeczność w następujący sposób:

$$1 = m([0,1]) = m\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} m(t_i + A_i) = m\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} (t_i + A_i)\Big) = m([0,2]) = 2.$$

Nie istnieje zatem miara, która mierzyłaby wszystkie podzbiory prostej, przypisując odcinkom ich długości i spełniając zarazem warunki przeliczalnej addytywności oraz niezmienniczości na przesunięcia. Sytuacja jest jednak inna, jeśli decydujemy sie na osłabienie któregoś z tych warunków.

I tak, w roku 1923 Banach udowodnił, że istnieje niezmiennicza na przesunięcia i *skończenie* addytywna funkcja m, określona na rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ wszystkich podzbiorów prostej i przypisująca każdemu zbiorowi, należącemu do $\mathcal{L}$, jego miarę Lebesgue'a (czyli *przedłużająca* miarę Lebesgue'a).

Z kolei, jeśli rezygnujemy z niezmienniczości na przesunięcia, to można rozważać hipotezę, że istnieje przeliczalnie addytywna miara określona na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ i przedłużająca miarę Lebesgue'a. Hipoteza taka, eliminująca w pewnym sensie problem zbiorów niemierzalnych, jest bardzo ciekawa, a jej konsekwencje stanowią żywy przedmiot badań. W szczególności, pociąga ona za sobą negację pewnych innych hipotez, dotyczących wszystkich podzbiorów prostej, w tym, jak pokazali Banach i Kuratowski w roku 1929, hipotezy continuum.

Więcej o hipotezie continuum można przeczytać w artykule *Miara liczności* na str. 10.

Wchodzimy tu więc w obszar teorii zbiorów, czyli teorii mnogości. Nie powinno to budzić zdziwienia, skoro rozważania dotyczą *wszystkich* podzbiorów prostej – to właśnie od aksjomatów teorii mnogości zależy, istnienie jakich zbiorów uznajemy. W szczególności, w roku 1970 Solovay pokazał, że za istnienie zbiorów niemierzalnych w sensie Lebesgue'a odpowiedzialny jest tzw. *aksjomat wyboru.* Rezygnując z aksjomatu wyboru, moglibyśmy radykalnie pozbyć się problemu zbiorów niemierzalnych, przyjmując po prostu, że każdy podzbiór prostej jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Ponieważ jednak aksjomat wyboru jest niezbędnym narzędziem w wielu działach matematyki, takie rozwiązanie jest nie do przyjęcia.

Aksjomat wyboru mówi, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych, parami rozłącznych, istnieje zbiór mający z każdym ze zbiorów tej rodziny dokładnie jeden element wspólny.

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski