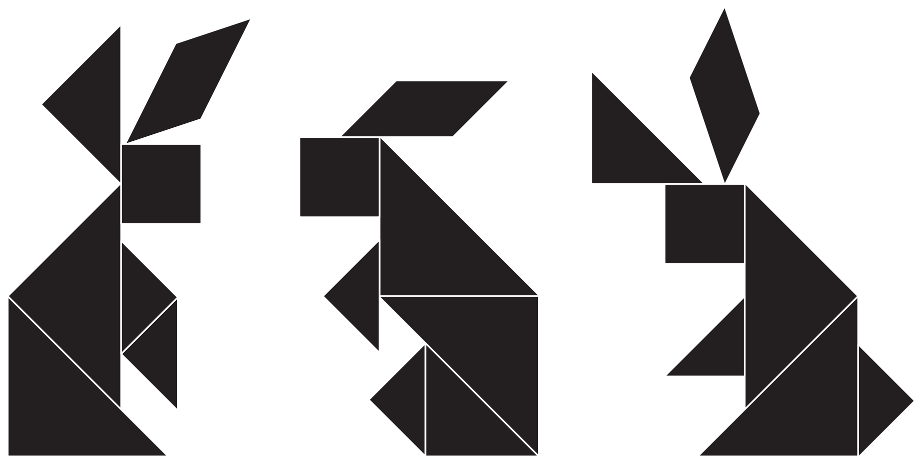
mała delta

Zabawy z miarą

Tangram to stara chińska zabawa, polegająca na układaniu zadanych figur z siedmiu klocków, ułożonych na rysunku 1 w kwadrat.

Rys. 1

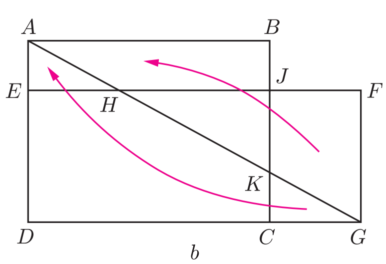


Rys. 2

Rysunek 2 ukazuje (w różnych pozach) zajączka, utworzonego z tych klocków.

Oczywiście, pole kwadratu jest równe polu zajączka, ściślej, wielokąta w kształcie zajączka. Dlaczego? Ponieważ obie figury składają się z przystających części, które w każdej z nich stykają się tylko brzegami. Wiemy, że figury przystające mają równe pola, oraz że jeśli figura składa się z mniejszych figur, które stykają się tylko brzegami, to pole całej figury jest sumą pól owych mniejszych figur składowych.

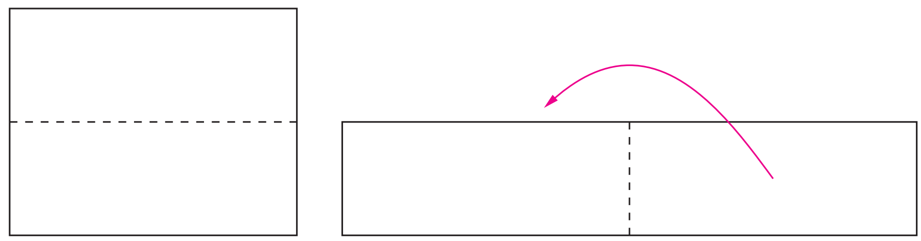
Można ten fakt wyrazić inaczej: kwadrat i zajączek mają równe pola, gdyż pocięliśmy kwadrat na kawałki, z których ułożyliśmy zajączka. Nasuwa się w takim razie naturalne pytanie odwrotne: czy, mając dwie figury o równych polach, możemy pociąć jedną z nich na kawałki, tak aby można z nich było złożyć drugą figurę?



Rys. 3

Na początek spróbujmy naszych sił na dwóch prostokątach o równych polach, ale różnych bokach (rysunek 3): $|AB| \cdot |BC| = |EF| \cdot |FG|$, przy czym $|EF| \neq |AB| \neq |FG|$ (więc i $|EF| \neq |BC| \neq |FG|$). Poprowadźmy odcinek łączący lewy górny wierzchołek A pierwszego prostokąta z prawym dolnym wierzchołkiem G drugiego prostokąta. Oznaczając odpowiednie punkty przecięcia tak jak na rysunku 3, stwierdzamy, że trójkąty ABK i HFG są przystające (Dlaczego? Tu może się przydać warunek równości pól, a nawet znajomość twierdzenia Talesa). Przesuwając zatem ten drugi wzdłuż odcinka AG (a trójkąt KCG na przystający do niego trójkąt AEH), pokryjemy cały prostokąt $ABCD$ kawałkami składającymi się na prostokąt $EFGD$.

Jest tylko jeden szkopuł. Przecież nie zawsze odcinek AG przetnie dolny prostokąt z lewej strony punktu J. Aby tak było, musi być spełniony warunek $|EF| < 2|AB|$. Ale cóż prostszego, jak pociąć prostokąt, który tego warunku nie spełnia, na taki, który go spełnia! Wystarczy powtarzać cięcie pokazane na rysunku 4 aż do skutku.

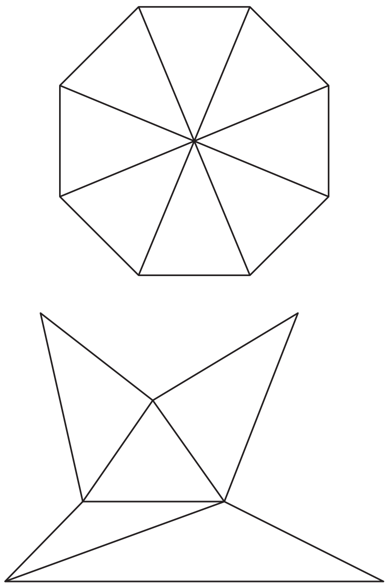


Rys. 4

Tak więc każdy prostokąt można tak pociąć, żeby z kawałków złożyć dowolny inny prostokąt o tym samym polu.

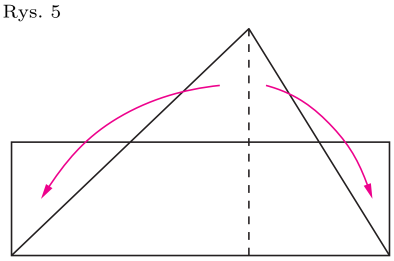
Możemy teraz zająć się dowolnymi wielokątami. Zapewne Czytelnik zgodzi się, że jeśli potrafimy pociąć każdy z dwóch wielokątów o tym samym polu na kawałki, z których można złożyć jeden (siłą rzeczy, taki sam dla obu) kwadrat, to potrafimy także pociąć jeden z tych wielokątów, tak by z otrzymanych kawałków złożyć drugi. Zajmiemy się zatem pocięciem wielokąta na kwadrat. Zauważmy, że:

1. każdy wielokąt można pociąć na trójkąty (rysunek 5);



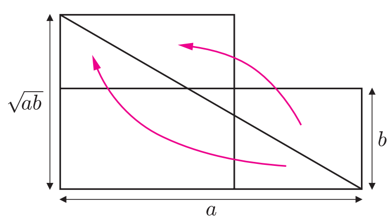
Rys. 5

2. każdy trójkąt można pociąć na kawałki, z których da się ułożyć prostokąt (rysunek 6) ...



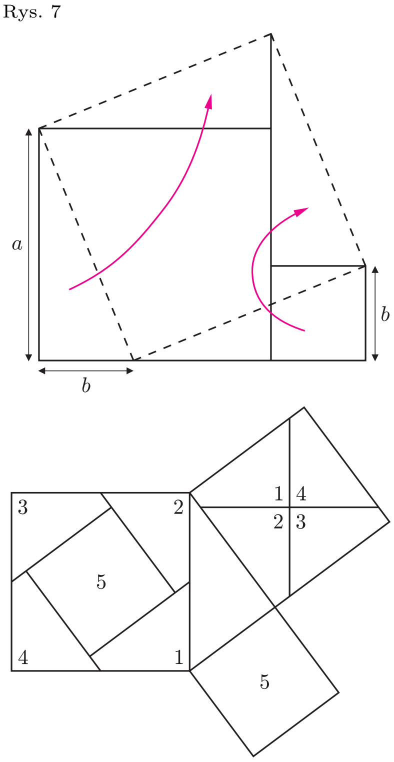
Rys. 6

3. ... a każdy prostokąt można pociąć tak, by złożyć z niego dowolny inny prostokąt o tym samym polu – na przykład kwadrat (rysunek 7).



Rys. 7

W ten sposób udało nam się pokroić wielokąt, od którego zaczęliśmy zabawę, na pewną liczbę kwadratów o łącznym polu równym polu tego wielokąta. Chcieliśmy jednak otrzymać jeden kwadrat. Przywołajmy więc na pomoc twierdzenie Pitagorasa, które pozwala z dwóch kwadratów zrobić jeden o tym samym polu. Jak? Pokazuje to rysunek 8.



Rys. 8

Mamy zatem brakujące ogniwo:

4. z otrzymanych kwadratów można złożyć jeden kwadrat, którego pole jest równe polu wyjściowego wielokąta.

Nazwijmy dwa wielokąty *równoważnymi przez pocięcie*, jeśli jeden z nich można pociąć na kawałki, z których można złożyć drugi. Udowodniliśmy następujące twierdzenie, znane od początków XIX wieku.

Twierdzenie Bolyaia–Gerwiena. Dwa wielokąty są równoważne przez pocięcie wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe pola.

Chciałoby się powiedzieć: nic bardziej naturalnego. Jakże mogłoby być inaczej? Okazuje się jednak, że problem znacznie się komplikuje, gdy przejdziemy do przestrzeni trójwymiarowej. W początkach XX wieku wykazano, że istnieją bryły trójwymiarowe (na przykład, dwa czworościany) o równych objętościach, takie że żadnej z nich nie można otrzymać z drugiej przez pocięcie (tym razem, na „kawałki" trójwymiarowe). Ale to już zupełnie inna sprawa (patrz artykuł na stronie 6).

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL