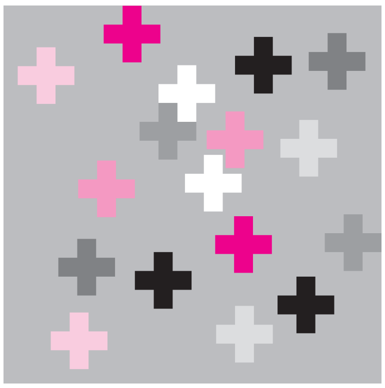
motywy Logo

Odległość, która nie jest metryką

Andrzej WALAT

Wiele lat temu ułożyłem zadanie na Warszawski Konkurs Informatyczny dla uczniów ośmioletniej wówczas szkoły podstawowej, które miało następującą treść.

Napisz procedurę o nazwie `dywan`, która rysuje losową liczbę $n < 18$ małych krzyżyków o boku 20 pikseli i losowych kolorach rozrzuconych losowo na tle kwadratu o boku 400 pikseli, jak na rysunku 1. Krzyżyki mogą się stykać bokami lub rogami, ale nie mogą na siebie nachodzić. Nie mogą również wystawać poza obszar kwadratu.



Rys. 1

W tym artykule omówię przykładowe rozwiązanie zadania, którego istotnym elementem będzie zdefiniowanie miary, która może posłużyć do oceny: czy jakiś dowolny punkt leży wystarczająco daleko od środków już istniejących krzyżyków, żeby można w nim było umieścić środek kolejnego krzyżyka. Rozwiązanie składa się z kilku krótkich procedur. Treść głównej procedury ma tylko dwa wiersze.

```
oto dywan
narysujKolorowyKwadrat
narysujKrzyżyki losowaListaKrzyżyków losowa 18
już
```

W pierwszym wierszu jest polecenie narysowania kolorowego kwadratu o żądanych rozmiarach. Oczywiście, nie jest to polecenie pierwotne Logo i musi być zdefiniowane.

W drugim wierszu jest polecenie narysowania krzyżyków z losowej listy o długości będącej losową liczbą naturalną mniejszą niż 18. Kluczowym elementem w tej konstrukcji jest funkcja o nazwie `losowaListaKrzyżyków`, która dla danej liczby naturalnej n generuje losową listę n punktów będących środkami nienachodzących na siebie krzyżyków. Jeśli $n = 0$, to wynikiem funkcji jest lista pusta. W przeciwnym przypadku wynikiem jest odpowiednie przedłużenie listy $n - 1$ elementowej o jeden losowy punkt. Można to zapisać w Logo w następujący sposób.

```
oto losowaListaKrzyżyków :n
jeśli :n = 0 [wynik []]
wynik przedłużenie losowaListaKrzyżyków :n - 1 losPkt
już
```

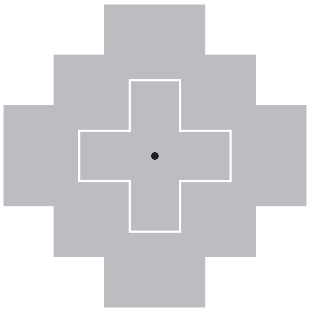
W powyższej definicji korzystamy z dwóch funkcji pomocniczych. Wynikiem funkcji `losPkt` jest losowo wybrany punkt z wnętrza kwadratu, leżący w odpowiedniej odległości od brzegu, aby krzyżyk o środku w tym punkcie nie wychodził poza kwadrat.

```
oto losPkt
wy [-170 -170] + losowa [341 341]
już
```

Funkcja `przedłużenie` dla danej listy `lPkt` środków niekolidujących ze sobą krzyżyków oraz punktu `p` daje w wyniku przedłużenie tej listy o punkt `p`, jeśli nie koliduje on z punktami na liście, albo o jakiś inny losowo wybrany punkt niekolidujący z punktami na liście.

```
oto przedłużenie :lPkt :p
jeśli brakKolizji? :p :lPkt [wynik nap :p :lPkt]
wynik przedłużenie :lPkt losPkt
już
```

Musimy jeszcze zdefiniować funkcję logiczną `brakKolizji?`, której wynikiem jest prawda, w przypadku, gdy dany punkt `p` nie koliduje z żadnym punktem na danej liście `lPkt`, albo – w przeciwnym przypadku – fałsz.



Rys. 2

```
oto brakKolizji? :pkt :lPkt
jeśli puste? :lPkt [wynik "prawda]
jeśli odległość :pkt pierw :lPkt < 3 [wynik "fałsz]
wynik brakKolizji? :pkt bp :lPkt
już
```

I tu wreszcie odwołujemy się do funkcji `odległość`. Punkt `p1` koliduje z punktem `p2`, gdy odległość `p1` od `p2` jest mniejsza niż 3. Ale nie chodzi w tym przypadku o zwykłą odległość euklidesową, tylko o odległość zdefiniowaną w następujący sposób.

```
oto odległość :p1 :p2
wynik (iloraz abs ((pierw :p1) - (pierw :p2)) 20)
     + iloraz abs ((ost :p1) - (ost :p2)) 20
już
```

Przyjmujemy, że dla danych dwóch punktów `p1` i `p2` ich odległość to suma ilorazów całkowitych różnic ich odpowiednich współrzędnych przez długość boku krzyżyka 20.

Rysunek 2 przedstawia koło o promieniu 3, tj. zbiór punktów, których odległość od punktu zaznaczonego kropką jest mniejsza niż 3.

Łatwo sprawdzić, że jest to właśnie to, o co nam chodzi. Jeśli umieścimy krzyżyk w zaznaczonym środku, to już w żadnym innym punkcie zacieniowanego obszaru nie można umieścić środka innego krzyżyka, natomiast każdy punkt poza tym obszarem jest akceptowalny.

Na koniec jeszcze jedna uwaga. Ścisłym matematycznym odpowiednikiem potocznego pojęcia odległości jest pojęcie metryki. Metryka to funkcja `M`, która każdej parze punktów `p1`, `p2` pewnej przestrzeni X przyporządkowuje nieujemną liczbę rzeczywistą `M(p1,p2)` spełniającą następujące warunki.

```
M(p1,p2) = 0 ⇔ p1 = p2
M(p1,p2) = M(p2,p1)
M(p1,p2) + M(p2,p3) >= M(p1,p3).
```

Nasza odległość spełnia tylko jeden z trzech aksjomatów metryki, pomimo tego jest bardzo użyteczną miarą pozwalającą stwierdzać, czy dwa punkty są za blisko, czy wystarczająco daleko.

W aneksie do tego artykułu na stronie WWW *Delty* jest pełny zestaw procedur stanowiących kompletne rozwiązanie zadania i jeszcze kilku uwag odnoszących się do pytań, jakie może nasuwać przedstawiony powyżej problem i jego rozwiązanie, na przykład: skąd się wzięła w treści zadania magiczna liczba 18? I czy można ją zamienić na jakąś inną liczbę – powiedzmy, 25?

Rozwiązanie zadania M 1213.
Wykażemy, że taki podział nie jest możliwy. W tym celu wystarczy udowodnić, że liczby $14 \cdot 14 = 196$ nie można przedstawić w postaci $10a + 27b$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi nieujemnymi.

Z zależności $196 = 10a + 27b$ wynika, że cyfrą jedności liczby $27b$ jest 6. Jednak wtedy cyfra jedności liczby b wynosi 8. Stąd w szczególności otrzymujemy $b \geqslant 8$. Wobec tego $196 \geqslant 27 \cdot b \geqslant 27 \cdot 8 = 216$. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że żądany podział nie jest możliwy.

Rozwiązanie zadania M 1215.
Przypuśćmy, że $3a \neq 2b$ i przyjmijmy $n = |3a - 2b|$. Wtedy $n > 0$, a więc liczby $an + 2$ oraz $bn + 3$ mają wspólny dzielnik $d > 1$. Zatem liczba d jest także dzielnikiem liczby

$$3(an + 2) - 2(bn + 3) = n(3a - 2b) = \pm n^2\,,$$

oraz liczby

$$(an + 2) - (bn + 3) = n(a - b) - 1\,.$$

Uzyskaliśmy sprzeczność, ponieważ liczby $\pm n^2$ i $n(a - b) - 1$ są względnie pierwsze: każdy dzielnik pierwszy p liczby n^2 jest także dzielnikiem liczby n, a więc p nie może być dzielnikiem liczby $n(a - b) - 1$. Wobec tego $3a = 2b$.