Miara liczności

Leszek KOŁODZIEJCZYK[*]

Jednym z podstawowych sposobów mierzenia zbioru jest liczenie jego elementów. Liczenie ma jednak jasny sens tylko dla zbiorów skończonych. Wiadomo, co to znaczy, że jakiś zbiór ma 5, 31 czy 1612 elementów. W przypadku zbiorów nieskończonych sytuacja jest natomiast znacznie mniej oczywista. Czy zbiorowi nieskończonemu da się w ogóle przypisać liczbę elementów sensowniej niż przez uznanie, że wynosi ona zawsze „nieskończoność”?

Punktem wyjścia do poszukiwania odpowiedzi jest następująca obserwacja: zbiory X i Y można uznać za równoliczne, jeśli istnieje bijekcja $f: X \to Y$, czyli taka różnowartościowa funkcja z X w Y, której zbiorem wartości jest całe Y. Okazuje się, że jest to bardzo trafna definicja równoliczności, mimo że w zastosowaniu do zbiorów nieskończonych prowadzi do zaskakujących wniosków. Zbiór nieskończony może być, między innymi, równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem: przykładowo, zbiory $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ i $2\mathbb{N}$ są równoliczne.

Symbol $2\mathbb{N}$ oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych.

Gdy dwa zbiory skończone są równoliczne, to jest tak dlatego, iż istnieje taka liczba naturalna n, że oba zbiory mają po n elementów. Chcielibyśmy również zbiorom nieskończonym przyporządkować takie kanoniczne obiekty, które wskazywałyby na to, że dany zbiór należy do danej klasy równoliczności. Okazuje się, że nasz cel da się zrealizować: z każdym zbiorem X można związać pewien zbiór $card(X)$, równoliczny z X, w taki sposób, że $card(X) = card(Y)$ dokładnie wtedy, gdy X i Y są równoliczne. Dla X skończonego n-elementowego $card(X)$ jest po prostu liczbą naturalną n, identyfikowaną ze zbiorem $\{0, \ldots, n-1\}$. Zbiór $card(X)$ nazywamy mocą zbioru X (a czasem liczbą elementów X), a wszystkie możliwe moce nazywamy liczbami kardynalnymi. Liczby kardynalne oznaczamy najczęściej literami κ, λ.

Definiujemy: $\kappa \leqslant \lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja różnowartościowa z κ w λ (a zatem, $card(X) \leqslant card(Y)$ dokładnie wtedy, gdy X jest równoliczny z podzbiorem Y). Zachodzi oczekiwany, ale bardzo ważny fakt: jeśli $\kappa \leqslant \lambda$ i $\lambda \leqslant \kappa$, to $\kappa = \lambda$ (twierdzenie Cantora–Bernsteina). Możemy więc przyjąć: $\kappa < \lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa \leqslant \lambda$ i $\kappa \neq \lambda$.

Czytelnik bez wątpienia zauważył, że nie podaliśmy definicji $card(X)$. Było to zaniedbanie celowe: zdefiniowanie liczb kardynalnych, a zwłaszcza wyjaśnienie sensu definicji, to proces dość żmudny. Z naszego punktu widzenia ważniejsza od dokładnej definicji jest zresztą struktura liczb kardynalnych. Okazuje się na przykład, że dla dowolnych zbiorów X, Y zachodzi $card(X) \leqslant card(Y)$ lub $card(Y) \leqslant card(X)$, a ponadto w każdym niepustym zbiorze liczb kardynalnych istnieje najmniejsza. Największej liczby kardynalnej nie ma, o czym się wkrótce przekonamy. Najmniejszymi są liczby kardynalne skończone, czyli po prostu liczby naturalne. Najmniejszą liczbą nieskończoną jest moc zbioru liczb naturalnych, oznaczana symbolem $\aleph_0$. Zbiory równoliczne z $\mathbb{N}$ nazywamy przeliczalnymi. Następną po $\aleph_0$ liczbą kardynalną jest… ale o tym za chwilę.

Na liczbach kardynalnych można wykonywać niektóre szkolne działania arytmetyczne: dodawanie, mnożenie, potęgowanie. Jeśli κ i λ są liczbami kardynalnymi, to $\kappa + \lambda$ jest mocą sumy dwu rozłącznych zbiorów, z których jeden ma moc κ, a drugi λ; $\kappa \cdot \lambda$ jest mocą iloczynu kartezjańskiego zbioru mocy κ i zbioru mocy λ; wreszcie κ^λ jest mocą zbioru wszystkich funkcji ze zbioru mocy λ w zbiór mocy κ. W szczególności, 2^λ jest mocą zbioru wszystkich podzbiorów zbioru mocy λ.

Każdy podzbiór zbioru X można utożsamić z funkcją $f: X \to \{0,1\}$, przyjmującą wartość 1 na elementach, które do podzbioru należą, i wartość 0 na pozostałych.

Dodawanie i mnożenie liczb nieskończonych to wyjątkowo proste operacje. Jeśli choć jedna z liczb κ, λ jest nieskończona, to $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Pokażmy dla przykładu, że $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Jeśli $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ i $Y = \{y_0, y_1, \ldots\}$ są zbiorami przeliczalnymi, to funkcja $f: X \times Y \to \mathbb{N}$ zadana wzorem $f(\langle x_n, y_m \rangle) = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$ jest bijekcją między $X \times Y$ a $\mathbb{N}$. Czytelnik być może zechce nie tylko uzupełnić szczegóły tego rozumowania, ale i zastanowić się nad „geometrycznym sensem” funkcji f (chodzi o ponumerowanie liczbami naturalnymi macierzy o przeliczalnie wielu wierszach, z których każdy jest przeliczalny).

Sam zapis $X = \{x_0, x_1, \ldots\}$ już wskazuje, że zbiór X jest przeliczalny. W takiej notacji x_n to element przyporządkowany liczbie naturalnej n.

[*] Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

Z potęgowaniem liczb kardynalnych nie jest już tak prosto. Udowodnimy, że już 2^λ musi być zawsze ostro większe od λ. Dowód $2^\lambda \geqslant \lambda$ jest łatwy, wystarczy zatem sprawdzić, że żaden zbiór X nie może być równoliczny ze zbiorem wszystkich podzbiorów X, oznaczanym przez $\mathcal{P}(X)$. Przypuśćmy, że $f : X \to \mathcal{P}(X)$ jest bijekcją i rozważmy zbiór $Y = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Oczywiście $Y \in \mathcal{P}(X)$, a zatem istnieje taki $x \in X$, że $f(x) = Y$. Zapytajmy teraz, czy $x \in Y$. Chwila zastanowienia pozwala stwierdzić, że każda z dwu możliwych odpowiedzi prowadzi do sprzeczności.

Przypisując każdemu elementowi x zbioru X jednoelementowy podzbiór $\{x\}$, stwierdzamy równoliczność zbioru X ze zbiorem jego jednoelementowych podzbiorów.

Tak więc, funkcja wykładnicza 2^λ zawsze zwiększa swój argument. Dalej jednak sprawy stają się bardziej zagmatwane. Oznaczmy następną po $\aleph_0$ liczbę kardynalną przez $\aleph_1$ i zadajmy naturalne pytanie: czy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? Pozytywna odpowiedź, w którą wierzył Cantor, nazywa się hipotezą continuum, CH („continuum” bywa czasem określeniem zbioru liczb rzeczywistych, a $card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$). Problem rozstrzygnięcia hipotezy continuum był pierwszy na słynnej liście problemów otwartych przedstawionej przez Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w 1900 r.

Z nierówności $2^\lambda > \lambda$ wynika, że – jak już wspominaliśmy – nie ma największej liczby kardynalnej. Nawiasem mówiąc, jest to w pewnym sensie jedyny powód, dla którego musi istnieć więcej niż jedna nieskończona liczba kardynalna. „W pewnym sensie” znaczy tyle: jeśli ze standardowej listy aksjomatów teorii mnogości skreślić aksjomat mówiący, że dla każdego zbioru istnieje zbiór wszystkich jego podzbiorów, to pozostała teoria jest niesprzeczna ze zdaniem „wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne”.

A zatem: czy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$? W 1938 r. Kurt Gödel pokazał, że przy założeniu niesprzeczności zwykłych aksjomatów teorii mnogości niesprzeczna z nimi jest nie tylko CH, ale nawet tak zwana uogólniona hipoteza continuum, GCH, czyli zdanie mówiące, że dla każdej nieskończonej λ, 2^λ jest następną liczbą po λ. Metoda Gödla polegała na wybraniu z uniwersum wszystkich zbiorów „tylko tych, których istnienie jest wymuszone przez aksjomaty” (tzw. zbiorów konstruowalnych) i pokazaniu, że w tak ograniczonej strukturze GCH jest spełniona. W 1963 r. natomiast Paul Cohen wprowadził tzw. metodę forcingu (która dla odmiany polega na dodawaniu nowych elementów do istniejących struktur) i za jej pomocą udowodnił, że również negacja CH jest niesprzeczna z aksjomatami.

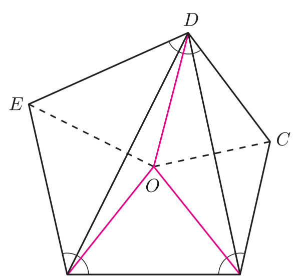
Hipoteza continuum jest więc nierozstrzygalna: nie da się jej ani udowodnić, ani obalić w oparciu o standardowo przyjmowane aksjomaty. Interpretacja tego rezultatu jest sporna. Dla jednych zamyka on problem, a może świadczy nawet o tym, że CH jest pozbawiona wartości logicznej czy „z przyczyn zasadniczych niejasna”. Dla innych CH pozostaje wartym badania problemem, rodzącym m. in. pytania o ewentualne nowe aksjomaty.

Tak czy inaczej, wynik Cohena zamknął pewną epokę w dziejach teorii liczb kardynalnych: podstawy pojęciowe teorii były już dawno ustalone, a jej najsłynniejszy problem otwarty okazał się nierozstrzygalny. Z drugiej jednak strony, stworzone przez Cohena metody spowodowały bujny rozwój teorii mnogości, umożliwiając rozwiązanie wielu klasycznych problemów oraz postawienie (i rozwiązanie) wielu nowych. Na zakończenie wspomnijmy więc pokrótce o dwu kierunkach badań, które odegrały znaczącą rolę w ostatnich kilku dziesięcioleciach.

Skoro wiadomo już było, jaki jest status CH, ważne stawało się ogólne pytanie o możliwe zachowanie funkcji 2^λ. Dość szybko odkryto, że dla „typowych” liczb kardynalnych (w tym dla wszystkich liczb nieskończonych, które są bezpośrednimi następnikami innych liczb) dowolność jest prawie całkowita. W. Easton udowodnił w 1970 r., że dla takich liczb dowolny przebieg funkcji wykładniczej zgodny z dwoma elementarnymi warunkami (funkcja 2^λ musi być niemalejąca i spełniać pewne wzmocnienie warunku $2^\lambda > \lambda$) jest niesprzeczny z aksjomatami. W szczególności, na nieskończonych argumentach funkcja wykładnicza nie musi być ściśle rosnąca. Dla „nietypowych” liczb (tzw. singularnych) dowolność przebiegu funkcji wykładniczej jest znacznie mniejsza. Tu badania trwały dużo dłużej i nie przyniosły eleganckiego ogólnego wyniku w rodzaju twierdzenia Eastona.

Inny ważny przedmiot badań to tzw. duże liczby kardynalne. Mówiąc w uproszczeniu, duża liczba to taka, która ma pewne własności kombinatoryczne sprawiające, że musi być „znacznie większa” od liczb ją poprzedzających (mniej więcej w takim sensie, w jakim liczba $\aleph_0$ jest znacznie większa od wszystkich liczb skończonych). Przykładem stosunkowo małych dużych liczb kardynalnych

Rozwiązanie zadania M 1214.
Oznaczmy przez O punkt przecięcia dwusiecznych kątów AED i BCD.



Wykażemy, że punkt O leży na dwusiecznych kątów BAE, ABC i CDE, co zakończy rozwiązanie zadania.

Proste OC i OE są symetralnymi odpowiednio odcinków BD i DA, a więc punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABD. Zatem $OA = OB = OD$. Wobec tego trójkąty AOE i DOE są przystające (cecha bok-bok-bok), skąd $\sphericalangle EAO = \sphericalangle EDO = \alpha$. Analogicznie otrzymujemy $\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO = \beta$. Ponadto $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \gamma$. Stąd korzystając z danych w treści zadania równości kątów, wnioskujemy, że $\alpha = \beta = \gamma$. Zależności te z kolei dowodzą, że punkt O leży na dwusiecznych kątów BAE, ABC i CDE.

są liczby nieosiągalne, tj. takie κ, że ilekroć $\lambda < \kappa$, to również $2^\lambda < \kappa$, a ponadto żaden zbiór mocy κ nie jest sumą mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ.

Duże liczby kardynalne mają dość specyficzny status logiczny. Można pokazać, że ich nieistnienie jest niesprzeczne ze zwykłymi aksjomatami teorii mnogości, oczywiście zakładając niesprzeczność samych aksjomatów. Domniemujemy, że istnienie dużych liczb kardynalnych jest również niesprzeczne z aksjomatami, ale tego dla odmiany nie można udowodnić – w przeciwnym przypadku popadlibyśmy w sprzeczność z drugim twierdzeniem Gödla. Mimo to wielu badaczy zajmujących się teorią mnogości ma dość przychylny stosunek do aksjomatów o istnieniu dużych liczb. Co więcej, aksjomaty takie bywają wykorzystywane i w głównonurtowej matematyce (np. w geometrii algebraicznej i topologii algebraicznej używa się czasem liczb nieosiągalnych w postaci tzw. uniwersów Grothendiecka). Niewykluczone, że któreś z tych aksjomatów zostaną kiedyś powszechnie przyjęte, choć na pewno nie odbędzie się to bez kontrowersji.

Jak mierzymy odległości kosmiczne?

Tomasz KWAST

Jedną z najważniejszych, jeśli nie najważniejszą umiejętnością astronoma jest umiejętność mierzenia (wyznaczania) odległości obserwowanych obiektów. Bez poznania odległości obiektu dyskusja o jego fizycznej naturze jest bezprzedmiotowa. Wszak np. z daleka gwiazda jasna (mówimy: o dużej jasności absolutnej) będzie wyglądać tak, jak słaba z bliska. Słońce i Księżyc mają niemal identyczne rozmiary kątowe, ale Słońce jest 400 razy dalej, a więc tyleż razy większe, jest więc zapewne ciałem o zupełnie innej naturze niż Księżyc itd. Jak doszło do poznania odległości ciał, z których tylko nieliczne najbliższe człowiek zdołał osiągnąć?

Odległości ciał najbliższych mierzy się „najuczciwiej" w tym sensie, że nie trzeba do tego żadnych założeń, np. co do natury danego ciała. Pomińmy metody laserowe i radarowe ze względu na ich dość ograniczone możliwości. Standardowo natomiast korzysta się (korzystało) z tego, że badany obiekt, oglądany z dwóch miejsc, jest widoczny w nieco różnych miejscach tła. W przypadku oczu nazywa się to efektem stereoskopowym. W zasięgu kilkudziesięciu metrów automatycznie rozróżniamy, co jest bliżej, a co dalej. Jeżeli oczy sztucznie rozsuniemy na większą odległość, np. budując dalmierz, to stereoskopowe widzenie sięgnie kilku kilometrów. Mierzy się tu kąt między kierunkami na obiekt z jednego i drugiego „oka". Znając bazę, czyli rozstaw oczu (lub obiektywów dalmierza, lub dwóch obserwatoriów), można na podstawie prostej geometrii ocenić odległość obserwowanego obiektu. Kąt, pod jakim z obiektu byłoby widać promień Ziemi, nazywa się paralaksą geocentryczną tego obiektu. Jej znajomość jest równoważna znajomości odległości ciała.

W ten sposób zmierzono odległości stosunkowo bliskich ciał: Księżyca, planet, planetoid. Metoda ta do gwiazd nie sięga, bo Ziemia jest za mała. Udało się jednak wykorzystać fakt, że w odstępie pół roku Ziemia przemieszcza się do miejsca odległego o średnicę okołosłonecznej orbity od miejsca startowego. A jest to – jak by nie było – 300 mln km. Taki „rozstaw oczu" umożliwił zmierzenie tzw. paralaks heliocentrycznych wielu gwiazd. Okazało się (w 1838 roku), że paralaksa heliocentryczna (dokładniej: to kąt, pod jakim z gwiazdy byłoby widać promień ziemskiej orbity) najbliższej gwiazdy jest kątem mniejszym od sekundy łuku. Dlatego pomiaru tego dokonano tak późno. Gwiazdy okazały się znacznie bardziej odległe, niż się ówczesnym astronomom zdawało. Odległość odpowiadająca paralaksie heliocentrycznej równej $1''$ to tzw. parsek (pc; łatwo