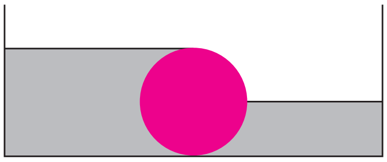
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Redaguje Jerzy B. BROJAN



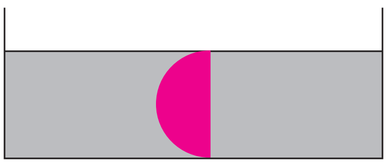
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2008

456. W płaskim naczyniu położono walec i nalano cieczy z jednej jego strony do wysokości równej średnicy walca, a innej cieczy nalano z drugiej strony do wysokości równej promieniowi walca (rys. 1). Przepływ cieczy wokół podstaw walca jest uniemożliwiony barierami, które nie przeszkadzają walcowi toczyć się w lewo lub w prawo. Jeśli gęstość walca jest równa ρ, w opisanej sytuacji pozostaje on w równowadze, a jego nacisk na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru, to ile wynosi gęstość cieczy z lewej strony walca, a ile – z prawej?

Przypominamy treść zadań:

457. Pan Nowak wybiera się samochodem na urlop na południe i namawia do tego samego znajomych. Ma w tym pewien interes – oczekuje pewnego wydłużenia doby, a więc wydłużenia wakacji (przy niezmienionej cenie noclegów!). Udało mu się zebrać grupę 20 rodzin, którym skutecznie przedstawił przewagę Grecji nad Norwegią jako miejsca letniego wypoczynku. O ile wydłuży się doba wskutek tej wyprawy?



Rys. 2

456. Rozważmy przeciętą pionowo połówkę walca w naczyniu, do którego nalano z obu stron jednakowej cieczy (rys. 2). Łatwo wykazać, że siły działające wzdłuż osi poziomej na taką połówkę się równoważą (inaczej wypadkową można by zaprząc do napędu perpetuum mobile). Dlatego poziomą składową siły F_{lpoz} wywieranej na walec od lewej strony można obliczyć tak, jakby działała na ściankę pionową. Ponieważ ciśnienie zmienia się proporcjonalnie do głębokości, więc powierzchnię ścianki $2rh$ pomnożymy przez ciśnienie w połowie głębokości, równe $\rho_l gr$:

$$F_{lpoz} = 2\rho_l g r^2 h,$$

gdzie r – promień walca, h – jego wysokość (tu długość), ρ_l – gęstość cieczy z lewej strony. Podobny argument zastosowany do ćwiartki walca pozwala obliczyć poziomą składową siły wywieranej na walec od prawej strony

$$F_{ppoz} = \frac{1}{2}\rho_p r^2 h.$$

Widzimy, że walec nie będzie się toczył w żadną stronę, jeśli $\rho_p = 4\rho_l$.

Aby obliczyć składową pionową F_{lpion} siły działającej z lewej strony, rozważmy walec zanurzony obustronnie w jednakowej cieczy. Siła wyporu równa jest ciężarowi wypartej cieczy, a z drugiej strony jest ona równa $2F_{lpion}$ (z symetrii). Stąd

$$F_{lpion} = \frac{1}{2}\rho_l g\pi r^2 h.$$

Do wyznaczenia F_{ppion} należy analogicznie rozpatrzyć siłę wyporu działającą na dolną połówkę walca. Wynikiem jest

$$F_{ppion} = \frac{1}{4}\rho_p g\pi r^2 h$$

Skoro nacisk walca na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru P, to

$$\frac{1}{2}P = F_{lpion} + F_{ppion}, \qquad \text{czyli} \qquad \frac{1}{2}\rho = \frac{1}{2}\rho_l + \frac{1}{4}\rho_p$$

Zatem $\rho_l = (1/3)\rho$, $\rho_p = (4/3)\rho$.

457. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu

$$(I + mr_1^2)\omega_1 = (I + mr_2^2)\omega_2$$

gdzie I jest momentem pędu Ziemi, m – łączną masą samochodów wraz z pasażerami i bagażem, $r_1 = R\cos\varphi_1$ – przybliżoną odległością Polski od osi Ziemi (R – promień Ziemi, φ_1 – szerokość geograficzna), r_2 – analogiczną odległością dla Grecji, ω_1 i ω_2 – prędkościami kątowymi. Szukane wydłużenie doby jest dane wyrażeniem

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{2\pi}{\omega_2} - \frac{2\pi}{\omega_1} \approx T_1\frac{m(r_2^2 - r_1^2)}{I} = T_1\frac{mR^2(\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1)}{I}.$$

Podstawiamy $T_1 = 24$ h $\approx 8{,}6\cdot 10^4$ s, $m \approx 30$ ton $= 3\cdot 10^4$ kg, $R = 6{,}4\cdot 10^6$ m, $\varphi_1 \approx 52^\circ$, $\varphi_2 \approx 38^\circ$, $I \approx 8\cdot 10^{37}$ kg $\cdot$ m^2 (wg tablic astronomicznych). Otrzymujemy $\Delta T \approx 3\cdot 10^{-16}$ s. No cóż, jeśli to nie wystarcza, można zawrzeć taktyczny sojusz z Amerykanami i Chińczykami...

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
448 ($WT = 2{,}65$) i **449** ($WT = 3{,}25$)
z numeru 12/2007

Konrad Kapcia	– Częstochowa	41,36
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,65
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	20,97
Krzysztof Magiera	– Łosiów	14,85

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
551 ($WT = 4{,}00$) i **552** ($WT = 1{,}19$)
z numeru 12/2007

Paweł Kubit	– Kraków	43,21
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	42,39
Jerzy Cisło	– Wrocław	40,34
Tomasz Tkocz	– Rybnik	38,96
Jerzy Witkowski	– Radlin	36,89

Zadanie **551** okazało się „nieskończenie trudne” (WT= max). Całą winę za ten stan rzeczy ponosi redaktor ligi: treść zadania w numerze 12/2007 została podana z błędem – w jednym miejscu zamiast i miało być 1. W numerze 4/2007 treść „przypomniano” z tym samym błędem, po czym podano rozwiązanie *innego zadania* – tego zamierzonego.

Cóż możemy powiedzieć Czytelnikom oprócz solennego **Przepraszamy**?

Od dwóch Czytelników dostaliśmy listy z interesującymi komentarzami. Wrócimy do nich w rocznym omówieniu.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2008

Przypominamy treść zadań:

559. Na wolnych polach kwadratowej planszy o rozmiarach $n \times n$ dwaj gracze na przemian stawiają pionki (nierozróżnialne). Wygrywa gracz, po którego ruchu znajdą się cztery pionki na dowolnych czterech polach, będących narożnikami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi planszy. Rozstrzygnąć (w zależności od n), który z graczy ma strategię zwycięską – rozpoczynający czy jego przeciwnik.

560. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których nierówność $(\sin x)^m \operatorname{tg} x > x^{m+1}$ jest spełniona dla $x \in (0;\pi/2)$.

559. Gdy $n = 1$, nikt nie może wygrać. Dalej zakładamy, że $n > 1$. Rząd pionowy (kolumnę) lub poziomy (wiersz), którego wszystkie pola są wolne, nazwiemy *pustym*. Przypuśćmy, że w pewnym momencie niezakończonej gry sytuacja na planszy spełnia następujące warunki:

(a) liczba pustych wierszy jest parzysta oraz liczba pustych kolumn jest parzysta;

(b) jeśli w pewnym wierszu [kolumnie] co najmniej dwa pola są zajęte, to są one jedynymi zajętymi polami w swoich kolumnach [wierszach].

Taką sytuację będziemy nazywać *strategiczną*.

Z warunku (b) wynika, że gracz G, do którego należy ruch, nie jest w stanie w tym ruchu wygrać. Zajmuje jakieś pole p. Wskażemy taktykę dla gracza G' (jego przeciwnika), rozważając trzy przypadki.

1^o. Jeżeli pole p leży na przecięciu wiersza i kolumny, które do tego momentu były puste, to G' zajmuje pole leżące na przecięciu innego wiersza i innej kolumny, które nadal są puste (a istnieją, w myśl warunku (a)). Liczba pustych wierszy oraz liczba pustych kolumn zmniejszają się o 2. Nowa sytuacja jest znów strategiczna.

2^o. Jeżeli pole p leży na przecięciu wiersza i kolumny, które przed ruchem gracza G były niepuste, to jest ono – po ruchu G – jednym z trzech zajętych narożników pewnego prostokąta; pole w czwartym narożniku jest wolne (co wynika z warunku (b)); zajmując teraz to pole, gracz G' wygrywa.

3^o. Jeżeli pole p leży na przecięciu pustej (do tej pory) kolumny k i niepustego wiersza w (lub odwrotnie; przyjmijmy, że właśnie tak), to rozważamy podprzypadki:

3.1^o. Gdy istnieje kolumna różna od k, w której zajęte są dwa pola – w tym jedno w wierszu w – to (podobnie jak w przypadku 2^o) te dwa pola wraz z polem p są trzema narożnikami prostokąta, w którego czwartym narożniku jest wolne pole (warunek (b)); zajmując to pole, gracz G' wygrywa.

3.2^o. Gdy wszystkie zajęte pola wiersza w są jedynymi zajętymi polami w swoich kolumnach, wówczas korzystamy znów z warunku (a), zapewniającego, że przed ruchem G istniała jeszcze co najmniej jedna pusta kolumna. Gracz G' zajmuje pole w tej kolumnie, w wierszu w. Liczba pustych wierszy nie zmienia się, liczba pustych kolumn zmniejsza się o 2. Powstała sytuacja i tym razem jest strategiczna.

Gracz G' może więc uniknąć porażki, stale lokując gracza G w sytuacji strategicznej, dopóki nie zdarzy się przypadek 2^o lub 3.1^o – co musi nastąpić, bowiem gra jest skończona i prostokąt na planszy pojawić się musi.

Gdy $n > 1$ jest liczbą nieparzystą, gracz rozpoczynający zajmuje na starcie dowolne pole i tworzy sytuację strategiczną, stawiając przeciwnika w roli gracza G. Stosując następnie opisane postępowanie, rozpoczynający zapewnia sobie zwycięstwo. Gdy zaś n jest liczbą parzystą, to już sytuacja wyjściowa (pusta plansza) jest strategiczna i role się odwracają – rozpoczynający przegrywa.

560. Załóżmy, że m jest taką liczbą, dla której badana nierówność

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{m+1} > \cos x \tag{1}$$

zachodzi dla wszystkich $x \in (0;\pi/2)$. Wiadomo, że $\sin x = x - (x^3/6) + o(x^3)$ przy $x \to 0+$. Jeśli więc d jest dowolną liczbą większą od 6, to dla x dodatnich, bliskich 0, mamy $\sin x < x - (x^3/d)$. Ponadto, $\cos x > 1 - (x^2/2)$ dla $x > 0$. Zatem

$$1 - \frac{x^2}{2} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{m+1} < \left(1 - \frac{x^2}{d}\right)^{m+1} = 1 - \frac{m+1}{d}x^2 + o(x^2)$$

przy $x \to 0+$. Stąd $2(m+1) < d$ dla każdego $d > 6$, czyli $2(m+1) \leqslant 6$, czyli $m \leqslant 2$.

Wykażemy, że i na odwrót, jeśli $m \leqslant 2$, to nierówność (1) zachodzi dla $x \in (0;\pi/2)$. Gdy $m \leqslant 2$, to $(\sin x/x)^{m+1} \geqslant (\sin x/x)^3$; wystarczy więc udowodnić nierówność (1) dla wykładnika $m{+}1 = 3$. Można ją wówczas przepisać w postaci

$$\frac{(\operatorname{tg} x)^3}{1 + (\operatorname{tg} x)^2} > x^3 \quad \text{dla} \quad x \in (0;\pi/2) \tag{2}$$

– lub równoważnie:

$$\frac{t}{(1+t^2)^{1/3}} > \operatorname{arctg} t \quad \text{dla} \quad t > 0. \tag{3}$$

Funkcja $f(t) = t\left(1+t^2\right)^{-1/3} - \operatorname{arctg} t$, określona dla $t \geqslant 0$ i ciągła w punkcie 0, ma pochodną

$$f'(t) = \left(1+t^2\right)^{-4/3}\left(1 + \frac{t^2}{3} - \left(1+t^2\right)^{1/3}\right) > 0.$$

Zatem $f(t) > 0$ dla $t > 0$, co dowodzi nierówności (3) i równoważnej jej nierówności (2).

Odpowiedź: Szukane liczby m to wszystkie liczby $m \leqslant 2$.