Informatyczny kącik olimpijski (11) – szukamy pola areału

Weźmy macierz A_0 równą

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i zdefiniujmy rekurencyjnie ciąg macierzy, z których każda następna powstaje zgodnie ze wzorem:

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix}.$$

Zatem A_1 jest wymiaru 4×4, A_2 – 8×8 i tak dalej. Kontynuując dostawianie macierzy, w ten sposób otrzymamy nieskończoną macierz, którą oznaczamy A_∞.

Zdefiniujmy *areał* jako spójny (w sensie sąsiedztwa wzdłuż boków, nie tylko w wierzchołkach), maksymalny (tj. niedający się powiększyć) zbiór pól macierzy o tych samych wartościach. W naszym zadaniu mamy dane współrzędne pola w macierzy A_∞ (wiersze i kolumny numerujemy od 0). Należy obliczyć rozmiar *areału* zawierającego to pole (możliwe, że jest on nieskończony).

Głównym problemem w tym zadaniu jest wyobraźnia – najpierw należy wyobrazić sobie, jak właściwie wygląda macierz A_∞, potem trzeba wyobrażać sobie kształty i rozmiary *areałów*.

„Wycięty" z A_∞ kwadrat o boku 2 (zawierający pole $(0,0)$) jest równy macierzy A_0. Jeśli kwadrat będzie miał bok 4, to będzie równy A_1, itd. Co więcej, wszystkie pola $(0,i)$ oraz $(i,0)$ mają w A_∞ wartość $+1$.

Jak więc wyglądają *areały*? Na pewno jest jeden *areał* nieskończony, zawierający punkt $(0,0)$ – choćby dlatego, że należą do niego wszystkie pola $(0,i)$ oraz $(i,0)$. Weźmy teraz *areał*, do którego należy punkt (i,j). Niech $i,j < 2^n$, dla pewnego n. Wtedy pole (i,j) należy do A_{n-1} (ponieważ wymiar tej macierzy to $2^n \times 2^n$). Ale kiedy tworzymy A_n, to na wszystkich polach $(2^n, x)$ i $(x, 2^n)$, dla $x < 2^n$, ląduje wartość 1. W takim razie albo cały poszukiwany *areał* zawiera się w A_{n-1}, albo łączy z tym samym *areałem*, do którego należy $(0,0)$. Jest więc tylko jeden *areał* nieskończony.

Mamy już pewien zbiór spostrzeżeń, spróbujmy więc podejść do rozwiązania zadania. Definicja A_∞ jest rekurencyjna – skorzystajmy więc z tej samej techniki. Niech polem, którego *areału* poszukujemy, będzie pole (i,j). Na początek znajdźmy takie n, że $i,j < 2^n$. Nasze obliczenia możemy zamknąć w macierzy A_{n-1}, ponieważ (zgodnie z poprzednimi stwierdzeniami) pole (i,j) będzie albo należeć do jedynego nieskończonego *areału*, albo jego *areał* będzie w całości zawarty w A_{n-1}.

Na początek sprawdźmy, do której ćwiartki macierzy A_{n-1} należy (i,j), i dla tej ćwiartki wywołajmy poszukiwania rekurencyjnie (tj. weźmy $i' = i \bmod 2^{n-1}$, $j' = j \bmod 2^{n-1}$, $n' = n-1$).

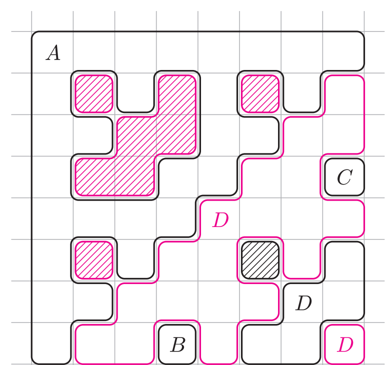
Wyróżnijmy pewne rodzaje *areałów*, z którymi mamy do czynienia przy obsłudze podmacierzy kwadratowej w A_∞. Niektóre z nich nie stykają się z krawędziami tej macierzy – takie *areały* są „zamknięte" i nie zostaną już powiększone. Pozostałe możemy podzielić na cztery klasy:

A – *areał* zawierający lewy górny róg

B – *areał* zawierający pole(a) na „dolnej" krawędzi macierzy

C – *areał* zawierający pole(a) na „prawej" krawędzi macierzy

D – *areał* spełniający **B** oraz **C**.



Macierz A_2. W obszarach obwiedzionych linią czarną znajdują się wartości $+1$, a kolorową -1. Zakreskowane areały są już zamknięte.

Wynikiem funkcji rekurencyjnej będzie wartość pola wraz z typem *areału* w podmacierzy, do którego to pole należy. I to już nam wystarczy, bo z tych danych możemy odtworzyć wartość pola i typ jego *areału* względem dwukrotnie większej macierzy. Na przykład, jeśli wywołanie rekurencyjne dla prawej-dolnej ćwiartki dało w wyniku wartość 1 w *areale* typu **A**, to względem większej macierzy jest to pole o wartości -1 typu **D**. Podobnie trzeba obsłużyć inne przejścia.

W trzech przypadkach – gdy w lewej-górnej ćwiartce otrzymamy -1 dowolnego typu, w prawej-górnej ćwiartce otrzymamy 1 typu **B**, lub w lewej-dolnej ćwiartce otrzymamy 1 typu **C** – możemy zakończyć dalsze obliczenia. Wówczas otrzymujemy *areał* zamknięty, który zawiera się całkowicie w aktualnej macierzy.

Tym razem ćwiczeniem dla Czytelnika pozostanie stwierdzenie, z ilu pól właściwie ten zamknięty *areał* się składa...

Filip WOLSKI