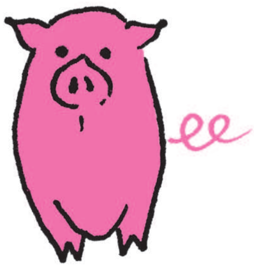
Stała Eulera

Tomasz SAWECZKO *



W roku 1740 Academia Scientiarum Imperialis Petropolitanae (współczesna nazwa to Rossijskaja Akademija Nauk) wydała siódmy tom *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, gdzie w artykule *De progressionibus harmonicis observationes* Leonhard Euler podał definicję stałej, którą tradycyjnie już nazywa się jego nazwiskiem.

Stała Eulera, którą oznaczamy przez γ, nie ma takiego znaczenia jak sławetne π lub e, jednakże pojawia się niekiedy w analizie matematycznej (np. jako wartość pewnych całek oznaczonych lub szeregów liczbowych) i w teorii liczb. O ile obecność γ w analizie matematycznej jest zupełnie naturalna, to w teorii liczb wydaje się zaskakująca. I tak np. znajdziemy ją w twierdzeniu Dirichleta o sumie dzielników liczb naturalnych (por. Władysław Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 2003, str. 115), w twierdzeniu Gronwalla (tamże, uwaga na str.112) lub w twierdzeniu matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego, Franciszka Mertensa (patrz `http://mathworld.wolfram.com/MertensTheorem.html`).

Stała Eulera ma także związek z hipotezą Riemanna. Otóż, istnieje pewne równoważne sformułowanie tej hipotezy, zwane nierównością Lagariasa – w dowodzie jej równoważności z hipotezą Riemanna korzysta się z innych nierówności powiązanych z γ.

W niniejszym artykule spróbujemy przyjrzeć się samej liczbie γ. Naturalnie, rozpoczniemy od definicji:

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \ln n\right), \quad \text{gdzie } H_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Udowodnijmy, że powyższa granica istnieje.

Dowód oprzemy na następujących prostych nierównościach:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Niech

$$a_n := H_n - \ln n, \quad b_n := H_{n-1} - \ln n, \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Z nierówności po obustronnym zlogarytmowaniu i prostych przekształceniach wynika, że ciąg (a_n) jest malejący, a ciąg (b_n) jest rosnący. Mamy zatem nierówności $b_2 \leqslant b_n < a_n \leqslant a_2$, dla $n \geqslant 2$. Więc ciągi (a_n) i (b_n) są ograniczone i monotoniczne. To kończy dowód.

Warto też przytoczyć tutaj wzór wiążący stałą Eulera z funkcją ζ Riemanna, który można otrzymać, korzystając z rozwinięcia logarytmu naturalnego w szereg potęgowy (Euler sam wyprowadził ten wzór, chociaż nie podał formalnego dowodu):

$$\gamma = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \cdot \zeta(i).$$

Gdzie – przypomnijmy – dla $x > 1$ definiujemy

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Prawdziwy jest również następujący wzór (zwany całką Eulera-Mascheroniego), który wiąże γ z π i e:

$$\int_0^\infty e^{-x} \ln^2 x dx = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Oznacza on, że pole pod wykresem funkcji $e^{-x}\ln^2 x$ na przedziale $(0, +\infty)$ jest równe $\gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.

Naturalnym pytaniem w tym momencie jest, ile wynosi γ i czy jest to liczba niewymierna? Spróbujmy najpierw obliczyć jej przybliżoną wartość. Podejdziemy do problemu geometrycznie i nieco intuicyjnie. Wykorzystamy fakt, który jest prostym wnioskiem z rachunku różniczkowego i mówi, że pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ na odcinku $[1, n]$ jest równe $\ln n$

$$\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n.$$

*student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Musimy obliczyć przybliżone pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$, tak aby w ten aproksymacyjny wzór było uwikłane wyrażenie H_n. Można to zrobić w bardzo prosty sposób: jako przybliżone pole pod wykresem funkcji $\frac{1}{x}$ weźmy sumę pól trapezów wyznaczonych przez punkty $(k,0)$, $\left(k,\frac{1}{k}\right)$, $(k+1,0)$ i $\left(k+1,\frac{1}{k+1}\right)$. Mamy wtedy:

$$\ln n = \text{Pole pod wykresem } \frac{1}{x} \text{ na odcinku } [1,n] \approx$$
$$\approx \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right) = H_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Stąd

$$H_n - \ln n \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Zatem, przechodząc do granicy, dostajemy przybliżenie $\gamma \approx \frac{1}{2}$. Rzecz jasna, nie jest to metoda precyzyjna, ponieważ błąd, który popełniamy, teoretycznie może być naprawdę dosyć duży – w rzeczywistości jednak tak nie jest, ale nie będziemy się tym tutaj zajmować.

Mamy też inne ładne przybliżenie stałej Eulera, które zgadza się do trzeciego miejsca po przecinku:

$$\gamma \approx \frac{\pi}{2e} = 0{,}57786367\ldots$$

Odpowiedź na drugie wyżej postawione pytanie (czy γ jest niewymierna?) nie jest znana (a od zdefiniowania stałej minęło około 270 lat!). Istnieją różne kryteria (nie)wymierności stałej Eulera, są one jednak bardzo skomplikowane i nieprzejrzyste. Szokujący wynik pochodzi od współczesnego niemieckiego informatyka, Thomasa Papanikolaou. Otóż, oszacował on, że jeżeli γ byłaby wymierna, to jej mianownik byłby większy od $10^{242\,080}$.

A jako ciekawostkę wspomnijmy, że słynny matematyk brytyjski, G.H. Hardy (1877–1947), oświadczył, że zrezygnuje z kierownictwa Katedrą Saviliana na Uniwersytecie w Oxfordzie na rzecz osoby, która udowodni, że γ jest niewymierna.

Eulera trapił problem wymierności γ, dlatego próbował obliczać ją z jak największą dokładnością. Później znajdowaniem kolejnych przybliżeń zajmowało się wielu matematyków i współcześnie informatyków, ale zdaje się już nie po to, aby sprawdzić, czy γ jest niewymierna...

Przedstawimy, do ilu miejsc po przecinku i w jakim stopniu poprawności obliczano γ. W *De progressionibus harmonicis observationes* Euler obliczył ją z dokładnością do szóstego miejsca po przecinku. Później, w roku 1781, w *De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente* obliczył γ z dokładnością do 16. miejsca po przecinku (w obydwu przypadkach pomylił się na ostatnim miejscu).

Przez wzgląd na obliczenia Mascheroniego (a właściwie błąd w nich popełniony, który był bodźcem dla innych matematyków do kolejnych weryfikacji przybliżonej wartości γ) liczbę γ nazywa się też stałą Eulera–Mascheroniego.

W roku 1790 włoski matematyk, L. Mascheroni, obliczył γ z dokładnością do 32. miejsca po przecinku (w pracy *Adnotationes ad calculum Euleri*), ale pomylił się już na dwudziestym miejscu. Zweryfikował to Johann von Soldner w 1809 roku, obliczając γ poprawnie do czterdziestego miejsca po przecinku. Wynik ten potwierdzili w 1812 roku C.F. Gauss i F.G.B. Nicolai.

Druga połowa XX wieku dostarcza nam już o wiele lepszych przybliżeń. I tak Donald Knuth w roku 1962 obliczył γ z dokładnością do 1271 miejsc po przecinku. A w roku 1997 Thomas Papanikolaou obliczył tę stałą z dokładnością do 1 000 000 miejsc po przecinku. Jakby tego było mało, w roku 1999 P. Demichel i X. Gourdon wyznaczyli stałą Eulera z dokładnością do 108 000 000 miejsc po przecinku.

Rekord świata należy (albo do niedawna należał) do S. Kondo, który obliczył stałą Eulera z dokładnością do... 2 miliardów miejsc po przecinku. I dalej nie wiemy, czy γ jest wymierna...