O problemie Catalana

Krzysztof KAMIŃSKI

student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki

Tytułowy problem to pytanie, czy przedstawienie

$$3^2 - 2^3 = 1$$

jest jedynym zapisem liczby 1 w postaci różnicy potęg właściwych.

Innymi słowy, czy jedynym rozwiązaniem równania

$$k^m - l^n = 1$$

w liczbach naturalnych, przy $m, n > 1$, jest czwórka $(k, l, m, n) = (3, 2, 2, 3)$. Powyższe równanie nazywamy dalej równaniem Catalana.

Problem ten sformułował w 1844 roku matematyk belgijski, Eugéne Charles Catalan (1814–1894), a pierwszy (i na razie jedyny) poprawny dowód podał w 2002 roku Preda Mihăilescu, matematyk rumuński pracujący w Niemczech. Jego dowód, zawarty w pracy *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, choć przez specjalistów określany jako krótki i przejrzysty, odwołuje się do teorii reprezentacji grup skończonych, przez co trudno go w *Delcie* przedstawić.

Wcześniej opublikowano rozmaite wyniki częściowe, np.

- dla $n = 2$ równanie Catalana nie ma rozwiązań (V. Lebesgue, 1850 r.)
- jeśli czwórka (k, l, m, n) spełnia równanie Catalana, to $k \geq n^{m-1}$ (S. Hyyrö, 1964 r.)
- jeśli $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ spełniają równanie $x^2 - y^n = 1$, to $(n, x, y) = (3, \pm 3, 2)$ (K. Chao, 1965 r.)
- równanie Catalana ma skończenie wiele rozwiązań (R. Tijdeman, 1976 r.)
- potęgi występujące w równaniu, tj. k^m i l^n, są mniejsze od liczby $\exp(\exp(\exp(\exp(730))))$ (M. Langevin, 1976 r.)
- jeśli czwórka (k, l, m, n) spełnia równanie Catalana, to $m, n < 10^{26}$ (A.M. Glass, 1994 r.)
- jeśli czwórka (k, l, m, n) spełnia równanie Catalana, to $m < 7{,}15 \cdot 10^{11}$ oraz $n < 7{,}78 \cdot 10^{16}$ (M. Mignotte, 1999 r.),

choć i tu często dowody były trudne i nieelementarne.

Ponadto przed Catalanem Euler wykazał (też nieelementarnie), że jeśli m jest liczbą pierwszą, to równanie $k^m - l^2 = 1$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych.

Zebrane informacje pochodzą ze strony `http://mathworld.wolfram.com/CatalansConjecture.html`, stron sąsiednich, a także z kilku prac poświęconych hipotezie.

My zajmiemy się nieco uproszczonym przypadkiem problemu Catalana: założymy, że l jest liczbą pierwszą (i będziemy pisać p zamiast l). Okazuje się, że taką wersję problemu można rozwiązać elementarnie i bardzo skromnymi środkami (zrobił to jako pierwszy G.C. Gerono w latach 1870–1871). Dowód sprowadza się do rozważenia trzech przypadków.

★ Dla $p = 2$ sprowadza się to do równania

$$(*) \qquad k^m = 2^n + 1.$$

Załóżmy, że równanie jest spełnione. Wówczas

$$2^n = k^m - 1 = (k-1)(k^{m-1} + \ldots + k + 1).$$

Stąd k jest nieparzyste oraz liczba składników w drugim nawiasie, czyli m, jest parzysta: $m = 2M$, $M \in \mathbb{N}$. Mamy więc

$$2^n = k^{2M} - 1 = (k^M - 1)(k^M + 1),$$

co oznacza, że $k^M - 1$ i $k^M + 1$ są całkowitymi nieujemnymi potęgami dwójki różniącymi się o 2. Zatem $k^M - 1 = 2$ i $k^M + 1 = 4$, skąd $k = 3$ i $M = 1$. Wtedy $k^m - 1 = 3^2 - 1 = 8 = 2^3$, czyli $n = 3$.

Otrzymana trójka $(k, m, n) = (3, 2, 3)$ spełnia równanie $(*)$. Jest zatem jedynym w tym przypadku rozwiązaniem.

Rozwiązanie zadania M 1210.
Liczbę A można przedstawić w postaci sumy n kolejnych liczb całkowitych dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad A = k + (k+1) + \ldots + (k+n-1) = kn + \frac{(n-1)n}{2}$$

dla pewnej liczby naturalnej $k \geqslant 1$. Jeśli $n = 2m$ $(m \geqslant 1)$ jest liczbą parzystą, to zależność $(*)$ sprowadza się do $A = (2k + 2m - 1)m$, natomiast jeśli $n = 2m + 1$ $(m \geqslant 1)$ jest liczbą nieparzystą, to równość ta przybiera postać $A = (2m+1)(k+m)$.

Przypuśćmy, że liczba A nie jest ani liczbą pierwszą, ani potęgą dwójki. Wtedy $A = a \cdot b$, gdzie $a \geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą, natomiast $b \geqslant 2$ jest liczbą naturalną. Jeśli $2b > a$, to przyjmijmy $k = \frac{1}{2}(2b - a + 1)$ oraz $m = \frac{1}{2}(a-1)$. Wtedy $A = (2m+1)(k+m)$, co na mocy powyższego rozumowania oznacza, że liczbę A można przedstawić w postaci sumy $2m+1$ kolejnych liczb naturalnych.

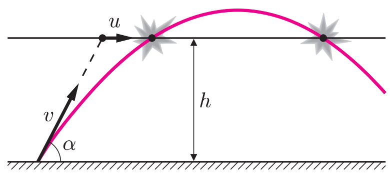
Jeśli natomiast $2b < a$, to przyjmijmy $k = \frac{1}{2}(a - 2b + 1)$ oraz $m = b$. Wówczas $A = (2k + 2m - 1)m$, co podobnie jak wyżej oznacza, że liczba A jest sumą $2m$ kolejnych liczb naturalnych.

Rozwiązanie zadania F 720. Z równań poziomego oraz pionowego ruchu kamienia oraz latawca mamy

$$tv\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = h,\ \ tv\cos\alpha = h\operatorname{ctg}\alpha + ut,$$

a stąd

$$h = \frac{2u}{g}(v\cos\alpha - u)\operatorname{tg}^2\alpha,\ \ \text{dla}\ v\cos\alpha > u.$$



Dla $v\cos\alpha > 2u$ zderzenie nastąpi w fazie wznoszącej lotu kamienia, a dla $u < v\cos\alpha < 2u$, gdy kamień będzie już opadał.

★★ Rozważmy teraz przypadek, gdy $p \geqslant 3$ i $k > 2$.

Załóżmy, że zachodzi $k^m - p^n = 1$. Wówczas k jest parzyste: $k = 2K,\ K \geqslant 2$. Mamy więc

$$p^n = (2K)^m - 1 = (2K-1)\sum_{j=0}^{m-1}(2K)^j,$$

skąd $2K - 1 = p^s$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}$ (założenie, że $k > 2$, wyklucza $s = 0$).

Mamy więc

$$p^{n-s} = \sum_{j=0}^{m-1}(p^s+1)^j.$$

Każdy z m składników powyższej sumy jest sumą liczby 1 i wyrażenia podzielnego przez p^s.

Nierówność $m \geqslant 2$ z założenia wyklucza $n = s$, więc p^{n-s} dzieli się przez p. Zatem liczba jedynek, czyli m, dzieli się przez p. W konsekwencji $m \geqslant 3$, a więc

$$p^{n-s} \geqslant \sum_{j=0}^{3-1}(p^s+1)^j = p^{2s} + 3p^s + 3 > p^{2s},$$

skąd wniosek, że $n - s > 2s$, czyli $n > 3s$. Stąd w szczególności $p^s \mid p^{n-s}$, a więc m, czyli liczba jedynek, o której pisaliśmy powyżej, dzieli się nie tylko przez p, lecz również przez p^s. Mamy więc $m = M \cdot p^s,\ M \in \mathbb{N}$. Rozważane równanie przybiera zatem postać

$$p^n = (2K)^{Mp^s} - 1. \tag{1}$$

Prawa strona dzieli się przez $(2K)^M - 1$, więc $(2K)^M - 1 = p^v, v \in \mathbb{N}$ ($v \neq 0$, bo zakładaliśmy, że $k \geqslant 2; M \in \mathbb{N}$).

Wstawiając $(2K)^M = p^v + 1$ do (1), otrzymujemy

$$p^n = (p^v+1)^{p^s} - 1,$$

czyli wobec wzoru Newtona

$$p^n = \binom{p^s}{p^s}p^{vp^s} + \binom{p^s}{p^s-1}p^{v(p^s-1)} + \ldots + \binom{p^s}{2}p^{2v} + \binom{p^s}{1}p^v. \tag{2}$$

Zapytajmy teraz o najwyższą potęgę p dzielącą sumę po prawej stronie powyższej równości. Okaże się, że jest nią $s + v$, co da sprzeczność.

Ostatni składnik po prawej stronie (2) to p^{s+v}. Popatrzmy na pozostałe. Z określenia liczb s i v: są to takie liczby naturalne, że

$$2K - 1 = p^s, \quad (2K)^M - 1 = p^v,$$

łatwo dostajemy zależność łączącą te liczby:

$$(p^s+1)^M = p^v + 1.$$

Stąd, oczywiście, $v \geqslant s$, a ponieważ $p \big| \binom{p^s}{2}$, więc $\binom{p^s}{2}p^{2v}$ i każdy następny (w lewą stronę) składnik sumy po prawej stronie równości (2) dzieli się przez p w potędze co najmniej $2v + 1 > s + v$. W konsekwencji szukana najwyższa potęga dzieląca sumę to (najwyższa) potęga dzieląca ostatni składnik, czyli $s + v$.

★★★ Pozostaje przypadek, gdy $p \geqslant 3$ i $k = 2$, czyli równanie

$$2^m - 1 = p^n, \quad m, n > 1.$$

Załóżmy, że równanie to jest spełnione. Skoro

$$2^m - 1 \equiv 3 (\operatorname{mod} 4),$$

to n musi być nieparzyste (parzysta potęga liczby nieparzystej daje modulo 4 resztę 1). Przyjmijmy $n = 2N + 1,\ N \in \mathbb{N}$. Zatem możemy napisać powyższe równanie w postaci

$$2^m = (p+1)(p^{2N} - p^{2N-1} + \ldots + p^2 - p + 1)$$

Popatrzmy na wyrażenie w drugim nawiasie. Jest ono sumą $2N + 1$ liczb nieparzystych, a więc liczbą nieparzystą. Jest to liczba większa od 1 (a nawet od N), gdyż dodajemy tam N liczb dodatnich $p^{2j} - p^{2j-1}$ i liczbę 1.

Doszliśmy więc do sprzeczności, gdyż 2^m nie dzieli się przez żadną większą od 1 liczbę nieparzystą.

Podsumowując rozważone przypadki, wnioskujemy, iż jedynym rozwiązaniem równania Catalana przy $l = p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest rozwiązanie równania $(*)$, czyli liczby $(k, p, m, n) = (3, 2, 2, 3)$.