Tak otrzymaną wartość cienia możemy pomnożyć przez wszystkie składowe koloru w danym punkcie, aby otrzymać kolor, który ma zostać wyświetlony. Potrzebujemy jeszcze tylko znaleźć metodę wyznaczania maksymalnej wartości $wys\_sty(x', y)$ dla $x' < x$. Jeżeli będziemy rysowali powierzchnię rząd po rzędzie od góry do dołu, każdy zaś rząd od lewej do prawej, to wartości te możemy zliczać dynamicznie, nie pogarszając złożoności algorytmu wyświetlającego, co Czytelnik bez problemu zaprogramuje. Wewnętrzna pętla rysująca woksel będzie teraz mieć postać:

```
wsp_cienia := cień (różnica_wys_sty)
for i := wys(x_sąsiada, y_sąsiada) to wys(x, y)
  kolor := skaluj(obrazek[x][y], wsp_cienia);
  rysuj(x + przesunięcie(y), y - i, kolor);
```

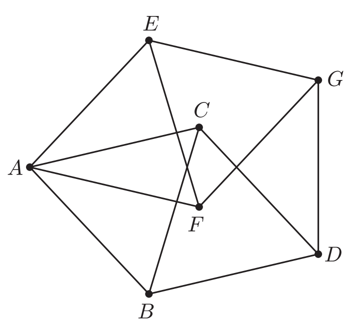
Efekty takiego cieniowania dla stałej $k = 0{,}6$ oraz różnych stałych a przedstawiają obrazki na okładce. Można tam także zobaczyć takie same sceny, ale już z nałożonymi konkretnymi teksturami bitmapowymi zamiast sztucznego obrazka w szachownicę, jednak tym razem dla stałej $k = 0{,}5$.

Technika wokselowania daje ciekawe efekty przy bardzo niewielkim nakładzie pracy. Niestety, ogranicza się ona do pofałdowanych powierzchni, a już zupełnie nie nadaje się do renderowania wielościanów, które są podstawą większości systemów grafiki trójwymiarowej. Jeżeli więc nie chcemy ograniczać się do efektów podobnych do przedstawionych w tym artykule, to potrzebujemy wniknąć znacznie głębiej w dziedzinę informatyki, jaką jest grafika trójwymiarowa.

Ale to już zupełnie inna opowieść...

Zestaw programów, którymi wygenerowane zostały obrazki z okładki, można pobrać ze strony WWW *Delty*.

Liczba chromatyczna płaszczyzny



Jeżeli każdy punkt płaszczyzny pomalujemy na jeden z trzech kolorów, to znajdą się dwa punkty tego samego koloru w odległości 1. Łatwo to wykazać. Rozważmy w tym celu konfigurację 7 punktów położonych tak, jak na rysunku, przy czym każdy z zaznaczonych odcinków ma długość 1. Łatwo stwierdzamy, że nie da się ich pokolorować trzema kolorami bez otrzymania monochromatycznej pary w odległości 1 (spróbujmy – malujemy A; wtedy B i C muszą otrzymać pozostałe dwa kolory; D musi więc mieć ten sam kolor co A; tak samo dla G; okazuje się więc, że D i G mają ten sam kolor).

Z kolei można tak pokolorować płaszczyznę 7 kolorami, żeby monochromatycznej pary w odległości 1 nie było. Zaczynamy od wyparkietowania płaszczyzny siatką sześciokątów foremnych, jak na planszy do gry Hex. Czytelnik bez problemu odpowiednio je pokoloruje, unikając jednokolorowej pary punktów odległych o 1 (każdy sześciokąt i jego sześciu sąsiadów powinno mieć w sumie 7 różnych kolorów; ostrożnie na krawędziach; jaką wziąć średnicę sześciokątów?).

Liczba chromatyczna płaszczyzny $\chi(\mathbb{R}^2)$ to najmniejsza liczba kolorów, potrzebna do pokolorowania płaszczyzny w taki sposób, aby uniknąć dwóch punktów odległych o 1 w tym samym kolorze. Wiemy już zatem, że:

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

Co jeszcze wiadomo? W ogólnym przypadku – nic. Nie umiemy posunąć się ani o krok względem tych bardzo prostych oszacowań. Nierozwiązany dotąd problem znalezienia liczby chromatycznej płaszczyzny (albo chociaż zmniejszenia zakresu widełek ją ograniczających) nosi też nazwę problemu Hadwigera–Nelsona.

Liczba chromatyczna płaszczyzny jest szczególnym przypadkiem ogólniejszego pojęcia *liczby chromatycznej grafu*. Jest to najmniejsza liczba kolorów, potrzebna do pokolorowania wierzchołków danego grafu tak, aby żadna krawędź nie łączyła wierzchołków o tym samym kolorze. Dla płaszczyzny (i każdej innej przestrzeni, w której można mierzyć odległość) możemy skonstruować tzw. graf odległości jednostkowych, którego wierzchołkami są punkty płaszczyzny, a krawędzie łączą punkty odległe o 1. Powiedzielibyśmy więc, że ten graf jest 7-kolorowalny, nie jest 3-kolorowalny i nie wiemy, czy jest 4-, 5- lub 6-kolorowalny.

A zatem – kredki w dłonie i do pracy! Ale uwaga – znane są różne ograniczenia. Wiadomo na przykład, że jeśli chcielibyśmy użyć tylko 4 kolorów, to którymś z nich musielibyśmy namalować zbiór niemierzalny, czyli wyjątkowo paskudny (nie do namalowania kredką).

M.A.