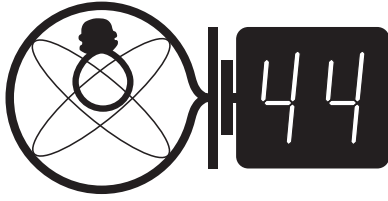


Klub 44

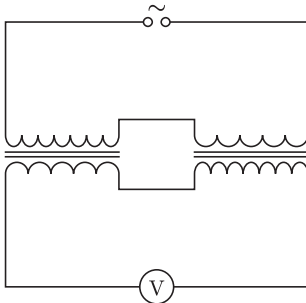


Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
446 ($WT = 1,20$) i 447 ($WT = 3,40$)
z numeru 11/2007

| | | |
|-------------------|---------------|-------|
| Konrad Kapcia | – Częstochowa | 41,36 |
| Jerzy Witkowski | – Radlin | 34,65 |
| Radosław Poleski | – Kołobrzeg | 20,97 |
| Krzysztof Magiera | – Łosioń | 12,46 |



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
549 ($WT = 2,92$) i 550 ($WT = 1,42$)
z numeru 11/2007

| | | |
|--------------------|----------------|-------|
| Marian | | |
| Łupieżowiec | – Zebrzydowice | 44,12 |
| Krzysztof Dorobisz | – Kraków | 44,06 |
| Paweł Kubit | – Kraków | 42,02 |
| Grzegorz | | |
| Karpowicz | – Wrocław | 41,20 |
| Jerzy Cisło | – Wrocław | 39,15 |
| Tomasz Tkocz | – Rybnik | 37,77 |
| Jerzy Witkowski | – Radlin | 35,70 |

Marian Łupieżowiec, od dawna uczestniczący w Lidze – choć z długimi przerwami – oto wchodzi do Klubu 44. Witamy!

Zaś Krzysztof Dorobisz – już po raz drugi.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2008

Przypominamy treść zadań:

454. Zaproponowano następujący sposób wystrzeliwania statków kosmicznych: należy wydrążyć szyb na wylot przez Ziemię, upuścić do niego raketę i włączyć silnik rakiety w chwili jej przelotu przez środek Ziemi. O jaką część zmniejszyłoby się zużycie paliwa przy wystrzeleniu tą metodą statku z II prędkością kosmiczną? Przyjąć założenia upraszczające: a) brak oporu powietrza, b) stała gęstość Ziemi, c) krótki czas działania silnika, d) bardzo wielka prędkość wylotu gazów z dyszy silnika (równoważne założenie: zużycie paliwa nie wpływa na zmianę masy statku).

455. Połączono szeregowo uzwojenie pierwotne transformatora z uzwojeniem wtórnym drugiego identycznego transformatora i zestaw podłączono do napięcia przemiennego o wartości skutecznej $U_1 = 100$ V. Drugie uzwojenia również połączono szeregowo (rys. 1) i zmierzono łączne napięcie, które okazało się równe $U_2 = 50$ V. Ile wynosi przekładnia transformatorów?

454. Na wstępie zauważmy, że energia niezbędna do oddalenia się statku do nieskończoności nie zależy od tego, czy zostanie przekazana w chwili startu, czy w chwili przelotu przez środek Ziemi. Zużycie paliwa jest jednak bezpośrednio związane nie z pracą i zmianą energii, ale z popędem siły odrzutu, proporcjonalnym (zgodnie z założeniem d) do zmiany prędkości. Przy ustalonym czasie działania silnika popęd siły $\int F dt$ jest też ustalony, ale wykonana praca $W = \int F v dt$ jest tym większa, im większa jest prędkość rakiety – na tym polega sens opisaney metody.

Wobec podanego założenia b) siła ciężkości okazuje się być proporcjonalna do odległości od środka Ziemi, a prędkość osiągnięta przez raketę w środku Ziemi jest równa I prędkości kosmicznej v_I (faktów tych nie dowodzimy, gdyż są przedstawione w wielu podręcznikach). Różnicę energii potencjalnych między środkiem Ziemi a powierzchnią można obliczyć przyjmując średnią siłę ciężkości równą połowie jej wartości na powierzchni, tzn. $\Delta E_{pot} = mgR/2$. Różnica energii między środkiem Ziemi a punktem nieskończenie odległym wynosi więc (przy oznaczeniach g – przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi, R – jej promień, G – stała grawitacji, M – masa Ziemi)

$$\Delta E_{pot} = \frac{1}{2}mgR + \frac{GMm}{R} = \frac{3}{2}mgR.$$

Taką energię kinetyczną musi osiągnąć rakieta w środku Ziemi, zatem jej prędkość musi wynieść $v_{sr} = \sqrt{3gR}$. Przyrost prędkości uzyskany dzięki pracy silników będzie równy $\Delta v = v_{sr} - v_I = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{gR}$, co należy porównać z II prędkością kosmiczną $v_{II} = \sqrt{2gR}$. Zużycie paliwa będzie mniejsze w stosunku

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = 0,518,$$

czyli prawie dwukrotnie! Niestety, pomysł ten (pochodzący od Arego Szternfelda, zmarłego w 1980 roku pioniera kosmonautyki) nie ma szans na praktyczną realizację.

455. W uzwojeniach podłączonych szeregowo do źródła napięcia natężenia prądu są jednakowe, zatem oddzielne napięcia (oznaczymy je jako U i U') są proporcjonalne do impedancji uzwojeń, czyli do kwadratu liczby zwojów:

$$\frac{U'}{U} = \frac{L'}{L} = \frac{n'^2}{n^2} = k^2,$$

gdzie k jest szukaną przekładnią. Ponadto mamy równania

$$U_1 = U + U', \quad U_2 = kU + U'/k.$$

Po wyeliminowaniu U i U' znajdujemy

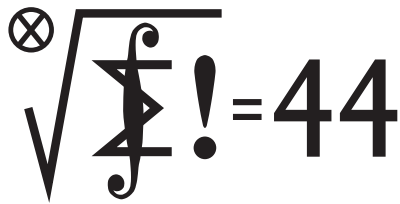
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1 + k^2}{2k},$$

czyli

$$k = \frac{U_1}{U_2} \pm \sqrt{\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 - 1}.$$

Wynikami liczbowymi są $k = 3,73$ i $k = 0,268$, przy czym druga z tych liczb jest odwrotnością pierwszej.

Klub 44



Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2008

Przypominamy treść zadań:

557. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B kwadratu $ABCD$ przecina odcinki BC i BD odpowiednio w punktach P i Q (różnych od B, C i D). Okrąg przechodzący przez punkty C, P, Q przecina odcinek BD w punktach Q i R . Wykazać, że punkty P, R i A są współliniowe.

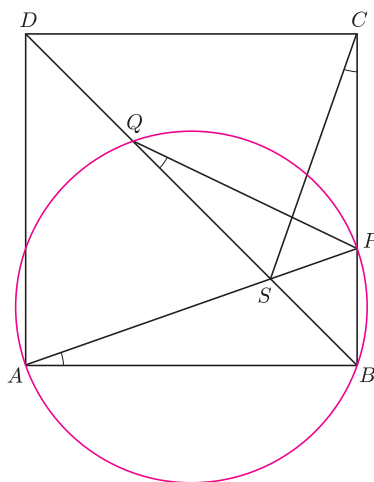
558. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x , spełniająca warunki:

$$1 + x + \dots + x^{m-1} \text{ dzieli się przez } n,$$

$$1 + x + \dots + x^{n-1} \text{ dzieli się przez } m.$$

557. Punkty A, B, P, Q leżą na okręgu w takiej właśnie kolejności. Zatem $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PQB|$.

Oznaczmy przez S punkt przecięcia odcinków PA i QB .



Punkty A i C są symetryczne względem prostej BD , więc

$$|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle SCB|.$$

Łącząc te związki, dostajemy równość $|\sphericalangle SQP| = |\sphericalangle SCP|$.

Ponieważ punkty C i Q leżą po tej samej stronie prostej AP , z uzyskanej równości wynika, że punkty C, P, Q i S leżą na jednym okręgu.

Wobec tego $S = R$ i mamy tezę zadania.

558. Para $m = 1, n = 1$ jest rozwiązaniem. Wykażemy, że innych nie ma.

Przypuścmy, że istnieją liczby naturalne m, n, x , spełniające podane warunki, przy czym $mn > 1$. Niech p będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym iloczynu mn . Bez straty ogólności przyjmijmy, że p dzieli n . W myśl warunku zadania, n dzieli $x^m - 1$. Zatem $x^m \equiv 1 \pmod{p}$.

Wykładnik m dzieli się przez najmniejszy wykładnik $k > 0$, dla którego $x^k \equiv 1 \pmod{p}$. Skoro $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (małe twierdzenie Fermata), to $k < p$. Jedynym dodatnim dzielnikiem liczby m , mniejszym od p , jest 1. Tak więc $k = 1$, czyli $x \equiv 1 \pmod{p}$. W konsekwencji

$$1 + x + \dots + x^{m-1} \equiv m \pmod{p}.$$

Ale ta suma dzieli się przez n (warunek zadania), więc i przez p . Stąd $m \equiv 0 \pmod{p}$; liczba p okazuje się być wspólnym dzielnikiem pierwszym liczb n i m – wbrew założeniu, że taki dzielnik nie istnieje. Sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązania zadań lingwistycznych

1. We wszystkich zwrotach występują rzeczowniki w funkcji wyrazu określającego lub określanego, przy czym *ryba* występuje 4 razy, a *rzeka* 3. W wyrazach lapońskich 4 razy występuje *kuL'*, więc to oznacza rybę, a 3 razy *jogk*, co musi oznaczać rzekę. Zatem *jogkkuL'* to ryba rzeczna i widać, że wyraz określający występuje na pierwszym miejscu. Wyrazy lapońskie są wszystkie dwuczłonowe, wśród polskich występuje słowo *rzęsy*, które znaczy tyle samo co *włosy (wokół oka)*. Dwukrotnie wśród wyrazów lapońskich występuje *n'aL'm* i *caL'm*, więc jedno z nich to polskie *oko*. Musi raz wystąpić z *rybą* jako wyraz określanego (drugi), a raz z włosami jako wyraz określający (pierwszy). Może to być zatem tylko *caL'm*. Słowo *n'aL'm* występuje z *rybą* (oznacza więc zupę lub pysk) oraz z *rzeką* (oznacza więc ujście lub brzeg). Jedynym wspólnym sensownym znaczeniem wydaje się *pysk=usta=ujście* (jak polska *Ustka* lub ujście rzeki po angielsku – *mouth of a river*, niemiecku – *Flüssmundung*, francusku – *embouchure*, czy hiszpańsku – *desembocadura*). Mamy więc odpowiedź: kolejne lapońskie słowa to *ujście rzeki (reczne usta)*, *zupa rybna, rzęsy (oczne włosy)*, *rybie oko, brzeg rzeki, rybi pysk (rybie usta)*, *ryba rzeczna*.

2. Można zaobserwować, że pierwszym członem zdań jest wyznacznik czasu (*ne* – przeszły, *kua* – terażniejszy, *to* – przyszły), drugim czasownik, następnym jest podmiot i dalej ewentualne dopełnienie. Czasowniki, rzeczowniki i zaimki nie odmieniają się. Przed rzeczownikami i zaimkami stawia się jedno ze słów *a, e, he*, wg zasady: w zdaniach z czasownikami przechodnimi przed podmiotem daje się *he*, jeśli jest to rzeczownik pospolity, natomiast *e*, jeśli jest to nazwa własna lub zaimek. Przed dopełnieniem stawia się *e*, jeśli jest to rzeczownik pospolity, oraz *a*, jeśli jest to nazwa własna lub zaimek. W zdaniach z czasownikami nieprzechodnimi podmiot traktuje się tak, jak dopełnienie w zdaniach z czasownikami przechodnimi. Odpowiedź: a) *Ne kookou a Sione*. b) *To kai e koe e kuli*. c) *Kua liti e Pule a koe*. d) *To kitia he manu e tama*. e) *Kua lele e kuli*.

3. Zauważmy, że każdy z podanych zaimków składa się z rdzenia i przyrostka. Ustawmy je w tabeli

| | | | |
|-----------------------|------------------------|---------------------|---------------|
| <i>k-sde</i> gdzie | <i>k-sgda</i> | <i>k-ako</i> | <i>k-amo</i> |
| | <i>t-sgda</i> wtedy | <i>t-ako</i> tak | |
| <i>on-sde</i> | | | <i>on-amo</i> |
| <i>ov-sde</i> | <i>ov-sgda</i> | | <i>ov-amo</i> |

Można domniemać, że rdzeń *k-* daje zaimki pytające i *k-sgda* oznacza *kiedy*, a *k-ako* – *jak*. Dalej widać więc, że przyrostek *-sgda* oznacza czas, a *-ako* – sposób, więc *-sde* ma związek z miejscem, a *-amo* – z kierunkiem. Zatem *k-amo* to *dokąd*. Ponieważ jeden z zaimków ma znaczenie *teraz*, musi to być *ov-sgda*, a więc *ov-* oznacza bliskość, a stąd *on-* musi oznaczać dalekość. Mamy więc brakujące tłumaczenia: *ov-sde* – *tutaj* w znaczeniu miejsca, *ov-amo* – *tutaj* w znaczeniu kierunku, *on-sde* – *tam* w znaczeniu miejsca, *on-amo* – *tam* w znaczeniu kierunku.

* * *

Warto zwrócić uwagę, że podobnie skonstruowane są zaimki w wielu innych językach słowiańskich, np.

- staropolskie:** *k'-i, k'-edy, k-to, g-dzie, t-am, t-ak, t-o, t-edy, on-ak, on-o, on-y, one-gdaj, on-giś, ow-o, ów-dzie, ow-ak, ow-am, ś-i, ś-am, wsz-edy, wsz-ędzie, wsz-ak, wś-o*;
- rosyjskie:** *g-de* – gdzie, *ko-gda* – kiedy, *k-ak* – jak, *k-to* – kto, *k-uda* – dokąd, *t-ogda* – wtedy, *t-ak* – tak (w znaczeniu sposobu), *t-am* – tam (w znaczeniu miejsca), *t-uda* – tam (w znaczeniu kierunku), *t-o* – to, tamto, *o-no* – ono, *s'-ej* – ten, ów, *s'-uda* – tutaj, *vez'-de* – wszędzie, *ws'-o* – wszystko, *vs'-egda* – zawsze;
- czeskie:** *k-de* – gdzie, *k-do* – kto, *k-dy* – kiedy, *k-am* – dokąd, *k-olik* – ile, *t-am* – tam, *t-olik* – tyle, *t-ady* – tutaj, *t-o* – to, *on-o* – ono;
- bułgarskie:** *k-oj* – kto, który, jaki, *k-ak* – jak, *k-olkova* – ile, *k-akyv* – jaki, *k-yde* – gdzie, *t-o* – ono, *taka* – tak, *t-olkova* – tyle, *t-akyv* – taki, *to-zi* – ten, *to-va* – to, *on-zi* – tamten, *ono-va* – tamto.