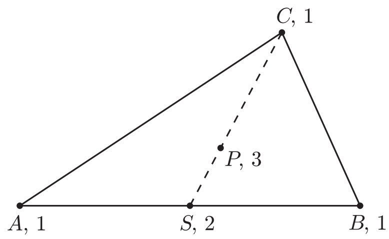
mała delta

Gdzie leżą środki ciężkości?

Oto dwa twierdzenia Archimedesa.

I. *Środkiem ciężkości wierzchołków trójkąta jest punkt przecięcia środkowych, które dzielą się przy tym w stosunku 2:1.*
Przypomnijmy – środek ciężkości wierzchołków figur to z definicji środek masy punktów materialnych powstałych przez umieszczenie w każdym wierzchołku tej samej masy. Postępując jak na rysunku 1, stwierdzamy, że środek ciężkości znajduje się na odcinku łączącym środek boku trójkąta z przeciwległym wierzchołkiem, dwa razy bliżej tego środka. Ponieważ to samo rozumowanie możemy przeprowadzić, rozpoczynając od dowolnego boku, więc twierdzenie zostało udowodnione.



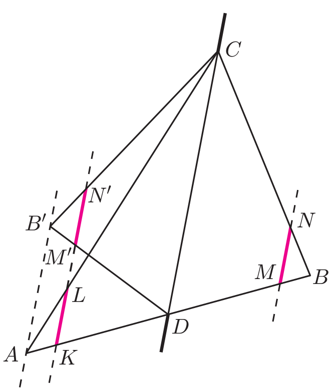
Rys. 1. Umieśćmy w wierzchołkach trójkąta jednakowe ciężarki 1 (np. kilogram). Ciężarki w A i B zastępuje ciężarek 2 umieszczony w środku S odcinka AB, zastąpmy więc A i B przez S. Ciężarki w C i S mogą być zastąpione przez ciężarek 3 umieszczony w P. Z prawa dźwigni (po obu stronach musi być ten sam iloczyn ramię razy siła) wynika, że P musi być dwa razy bliżej punktu, gdzie ciężar jest dwa razy mniejszy, czyli $PC = 2 \cdot PS$.

II. *Środkiem ciężkości trójkąta-deseczki też jest punkt przecięcia środkowych trójkąta*.
Tu dowód wymaga jeszcze jednego zmyślnego pojęcia: *prostej równowagi*. Tak jak środek ciężkości to punkt, w którym podparte ciało (przez chwilę przynajmniej) będzie w równowadze, tak prosta równowagi to taka prosta, że ciało podparte wzdłuż niej też zachowa równowagę. Z tego wynika, że środek ciężkości leży na każdej prostej równowagi.

Dowód Archimedesa polegał na wykazaniu, że środkowa jest w trójkącie-deseczce prostą równowagi. Wystarczy w tym celu stwierdzić, że oddziaływanie na środkową jest symetryczne – tyle samo z jednej, co z drugiej strony. A więc wystarczy wykazać, że odcinki złożone z punktów trójkąta jednakowo oddalonych od środkowej są równej długości. W tym celu narysujmy (rys. 2) jakiś odcinek MN równoległy do środkowej i przecinający trójkąt ABC po stronie wierzchołka B. Odbijmy teraz symetrycznie względem środkowej całą tę część trójkąta (otrzymamy punkty B', M', N'). Oznaczmy przez KL odcinek uzyskany z przecięcia prostą $M'N'$ nieodbijanej części trójkąta. Sam dowód przebiega tak

$$\frac{KL}{CD} = \frac{AK}{AD} = \frac{B'M'}{B'D} = \frac{M'N'}{CD}, \quad \text{zatem} \quad KL = M'N' = MN.$$

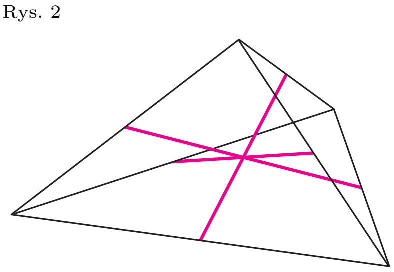
Trzy równości stosunków biorą się z zastosowania twierdzenia Talesa kolejno do trójkątów ACD, DAB' i $B'CD$. Zatem każda środkowa jest prostą równowagi, a więc środek ciężkości musi leżeć w ich wspólnym punkcie.



Rys. 2

Zajmijmy się teraz czworokątami.

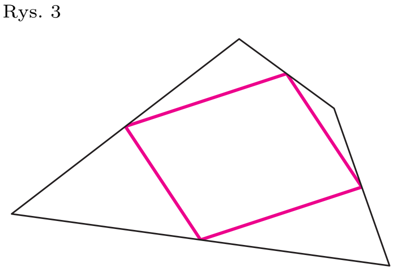
Środek ciężkości wierzchołków czworokąta można, rzecz jasna, łatwo wyznaczyć. Jest to środek odcinka łączącego środki przeciwległych boków – faktycznie środek ciężkości dwóch sąsiednich wierzchołków wypada w środku łączącego je boku, dwóch pozostałych też, a w obu tych środkach są te same masy (te w wierzchołkach razy 2).



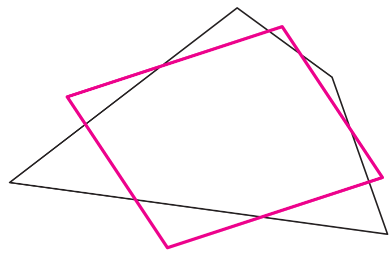
Rys. 3

Taka prosta obserwacja ma jednak ciekawe konsekwencje. Po pierwsze, cztery wierzchołki można połączyć w pary na trzy sposoby. Zatem prawdziwe jest twierdzenie (rys. 3):
odcinki łączące w czworokącie środki przeciwległych boków i odcinek łączący środki przekątnych mają wspólny środek.

Po drugie, mamy inne twierdzenie (rys. 4):
łącząc środki kolejnych boków czworokąta, otrzymujemy równoległobok.
Istotnie, równoległobok jest jedynym czworokątem, którego przekątne połowią się. Taki równoległobok nazywa się *równoległobokiem Varignona* danego czworokąta od nazwiska XVII-wiecznego matematyka.

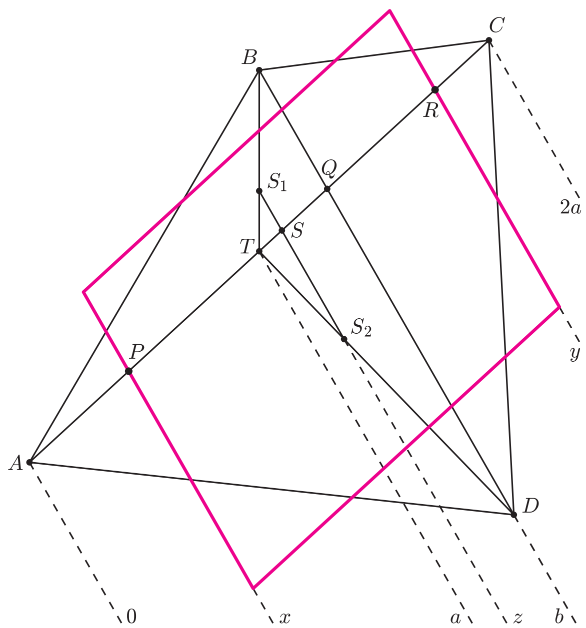


Rys. 4



Rys. 5

Zadanie znalezienia środka ciężkości dowolnego czworokąta-deseczki zostało pozytywnie rozwiązane (przed stuleciem) przez Wittenbauera. Tak mu się spodobał równoległobok Varignona, że postanowił również ten środek ciężkości określić poprzez równoległobok – my nazywamy go dziś *równoległobokiem Wittenbauera*. Buduje się go tak. Każdy bok czworokąta dzielimy na trzy jednakowe części i prowadzimy proste przez każde dwa punkty sąsiadujące (na różnych bokach) kolejno z każdym wierzchołkiem. Proste te wyznaczają, oczywiście, równoległobok – podobnie jak w przypadku równoległoboku Varignona można z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wykazać, że boki równoległoboku są parami równoległe do przekątnych wyjściowego czworokąta. Otrzymany równoległobok Wittenbauera (rys. 5) ma zatem boki równoległe do boków równoległoboku Varignona, jest tylko większy – jak nietrudno sprawdzić (czy naprawdę nietrudno?) – dla każdego czworokąta liniowo $\frac{4}{3}$ razy. Wittenbauer wykazał, że środek jego równoległoboku jest środkiem ciężkości wyjściowego czworokąta-deseczki. Oto, jak się to robi.



Rys. 6

Posłużymy się jedną osią układu współrzędnych (Kartezjusz, od którego nazwiska nazywa się układy współrzędnych, sam też posługiwał się zawsze jedną osią). Będzie nią przekątna AC danego czworokąta (rys. 6); wszystkie inne punkty będziemy rzutować na tę oś w kierunku drugiej przekątnej. Niech S_1 i S_2 będą środkami ciężkości trójkątów, na które dzieli czworokąt przekątna AC; prosta je łącząca ma kierunek drugiej przekątnej. Poprowadźmy bowiem środkowe w tych trójkątach ze środka T przekątnej AC – S_1 i S_2 odcinają z nich po jednej trzeciej – znów twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa w trójkącie TBD. Obierzmy zero osi AC w punkcie A, współrzędną T niech będzie a (wówczas współrzędną C będzie $2a$), a współrzędną punktu Q przecięcia przekątnych niech będzie b. Obliczymy teraz współrzędne x, y, z punktów P, R, S przecięcia AC przez boki równoległoboku Wittenbauera i przez prostą S_1S_2. Z twierdzenia Talesa kolejno w trójkącie ABD mamy $x = \frac{1}{3}b$, w trójkącie CBD mamy $y = b + \frac{2}{3}(2a - b) = \frac{1}{3}(b + 4a)$ i w trójkącie TBD mamy $z = a + \frac{1}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(b + 2a)$.

Okazało się zatem, że z jest średnią arytmetyczną x i y, a więc S jest środkiem odcinka PR, czyli prosta S_1S_2 przechodzi przez środek równoległoboku Wittenbauera.

I o to nam chodziło. Środek ciężkości danego czworokąta-deseczki można obliczyć jako środek ciężkości dwóch punktów materialnych: S_1 z masą proporcjonalną do pola trójkąta ABC i S_2 z masą proporcjonalną do pola trójkąta ADC. Jakie by te masy nie były, zawsze środek ciężkości będzie zatem leżał na prostej S_1S_2, czyli na prostej przechodzącej przez środek równoległoboku Wittenbauera.

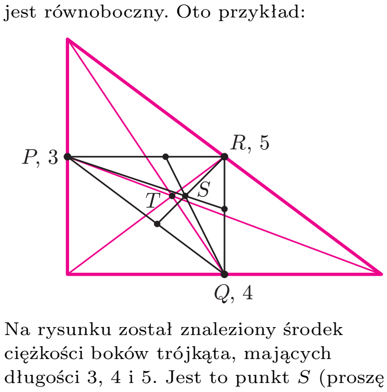
Biorąc z kolei pod uwagę przekątną BD, otrzymamy tym sposobem inną prostą, która przechodzi przez środek czworokąta Wittenbauera i na której leży środek ciężkości danego czworokąta. Łącznie zatem ten środek ciężkości musi leżeć na obu prostych, czyli po prostu być środkiem czworokąta Wittenbauera.

Ciekawym zadaniem na ten temat jest udowodnienie, że równoległoboki Varignona i Wittenbauera tego samego czworokąta mają wspólny środek wtedy i tylko wtedy, gdy ten czworokąt sam też jest równoległobokiem.

Pokrywanie się środków ciężkości wierzchołków wielokąta i wielokąta-deseczki jest bowiem (poza trójkątami) egzotyczne – ma miejsce na przykład wtedy, gdy wielokąt można nałożyć na niego samego co najmniej na trzy sposoby.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Oczywiście, wielokąt ma jeszcze trzeci środek ciężkości – środek ciężkości boków, traktowanych jak odcinki drutu równej grubości. Ten jednak nawet w przypadku trójkątów pokrywa się z pozostałymi środkami ciężkości jedynie, gdy trójkąt jest równoboczny. Oto przykład:



Na rysunku został znaleziony środek ciężkości boków trójkąta, mających długości 3, 4 i 5. Jest to punkt S (proszę sprawdzić). Jak widać, nie pokrywa się z punktem T, w którym przecinają się środkowe. Może Czytelnicy znajdą jakieś ciekawe twierdzenia o środkach ciężkości boków trójkąta i czworokąta?