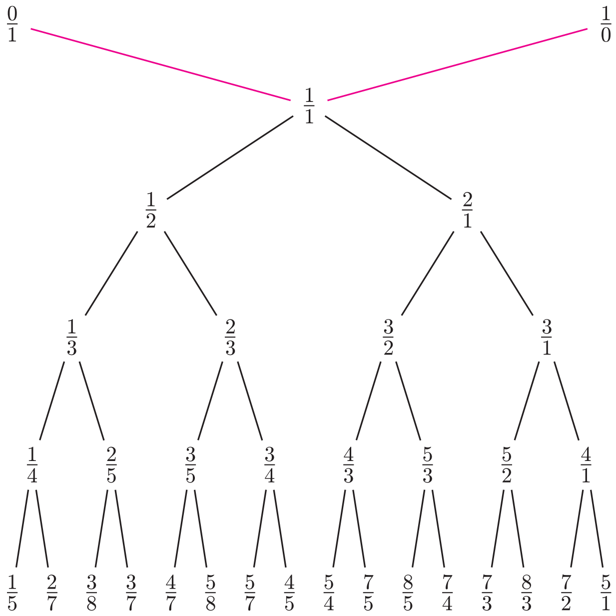


Rys. 7

algorytmu od końca wstecz pozwala skonstruować okrąg styczny w punkcie $(x, 0)$ za pomocą przesunięć oraz inwersji, zaczynając od okręgu stycznego w zerze.

Uważny Czytelnik z pewnością domyśla się już, co powyższa konstrukcja okręgów stycznych do prostej OX ma wspólnego z ułamkami Fareya i okręgami Forda. Oczywiście skonstruowane w powyższy sposób okręgi są właśnie okręgami Forda, co wynika z pokazanych wcześniej własności oraz faktu, że okręgi styczne do prostej OX w punktach $(x, 0)$ dla x całkowitych mają promienie równe $1/2$. Z faktu, że każda liczba wymierna ma swój okrąg Forda oraz z udowodnionych wcześniej własności tychże okręgów wynikają pozytywne odpowiedzi na postawione przez Fareya pytania.

Pisząc o ułamkach Fareya oraz okręgach Forda należy wspomnieć, że zagadnienie to ma także inną interesującą interpretację, a mianowicie drzewo Sterna–Brocota. Jest to algorytm generujący liczby wymierne w sposób mechaniczny za pomocą zwiększania licznika i/lub mianownika (pomijamy powtórzenia) jak to pokazano na rys. 7.

Na zakończenie warto wspomnieć o pewnych wnioskach związanych z samą historią opisanego powyżej odkrycia. Pokazuje ono, że historia jako nauka, a w szczególności historia matematyki nie jest nauką sprawiedliwą – wszakże ten artykuł poświęcony był „ułamkom Fareya”, a nie „ułamkom Harosa”. Poza tym okazuje się, że nie trzeba być wielkim matematykiem, by zostać zapamiętanym. Najtrafniej oddaje to komentarz Hardy'ego: *Farey is immortal because he failed to understand a theorem which Haros had proved perfectly fourteen years before.*

Bibliografia:

John Conway, Richard Gay, *Księga liczb*, WNT, 2004

http://www.cut-the-knot.org/proofs/fords.shtml

http://www.cut-the-knot.org/blue/Farey.shtml

http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml

Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

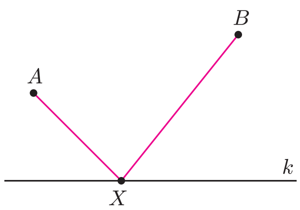
F 717. W szczelnej kolbie znajduje się woda o temperaturze 0°C. Po odpompowaniu z kolby powietrza cała woda zamarzła lub wyparowała. Jaka część wody wyparowała? Przyjąć, że nie było dopływu ciepła z zewnątrz, ciepło parowania wody w temperaturze $r = 0^\circ$C to $2{,}54 \cdot 10^3$ J/g, a ciepło topnienia lodu $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^3$ J/g.
Rozwiązanie na str. 6

F 718. 100 g lodu o temperaturze 0°C umieszczono w naczyniu nieprzewodzącym ciepła i poddano ciśnieniu $6 \cdot 10^7$ Pa. Jaka część lodu roztopi się? Przyjąć, że podwyższenie ciśnienia o $1{,}39 \cdot 10^7$ Pa sprawia, że temperatura topnienia lodu obniża się o 1°C. Ciepło właściwe lodu wynosi $c = 2{,}100$ J/(g $\cdot\, 1^\circ$C).
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Waldemar POMPE

M 1207. Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez $6^n - 1$.
Rozwiązanie na str. 15

M 1208. Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych posiada dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Wykazać, że wszystkie osoby obecne na przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.
Rozwiązanie na str. 24



M 1209. Dane są prosta k oraz punkty A i B leżące po tej samej stronie prostej k (rysunek). Na prostej k wyznaczyć taki punkt X, dla którego wartość wyrażenia $AX^2 + BX^2$ jest najmniejsza.
Rozwiązanie na str. 24