# Ułamki Fareya i okręgi Forda

Jarosław FABERSKI*

Historia ułamków Fareya, zwanych też ciągami Fareya, zaczęła się w 1816 roku. Wtedy to John Farey – brytyjski geolog interesujący się matematyką – zauważył pewne ciekawe własności, badając ułamki z przedziału $[0,1]$ o małych mianownikach. Niestety nie potrafił udowodnić tego, że jego obserwacje dają się uogólnić dla ułamków o większych mianownikach. Z drugiej strony nie udało mu się znaleźć kontrprzykładu pokazującego, że zauważone własności są jedynie dziełem przypadku. Aby rozwiać swoje wątpliwości wysłał do redakcji *Philosophical Magazine* list, w którym poinformował o swoim odkryciu, licząc na pomoc czytelników. List został przetłumaczony na francuski i wysłany Cauchy'emu, który udowodnił hipotezy stawiane przez Fareya. Nieco później okazało się, że już w 1802 roku C. Haros odkrył i udowodnił to, co czternaście lat później zauważył Farey.

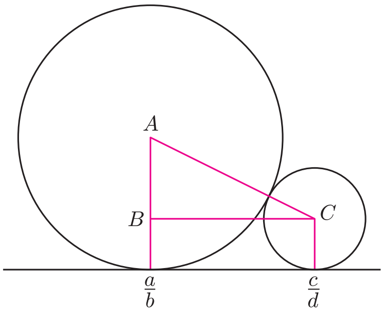
Przyjrzyjmy się teraz owym własnościom, o których Farey napisał w swoim liście do *Philosophical Magazine*. Niech $F_n$ będzie rosnącym ciągiem ułamków nieskracalnych z przedziału $[0,1]$ o mianownikach nie większych od $n$ – taki ciąg będziemy nazywać $n$-tym ciągiem Fareya. Pierwsze cztery takie ciągi wyglądają następująco:

$$F_1 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right), \; F_2 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right), \; F_3 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right), \; F_4 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$$

Niech $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ to kolejne ułamki w $n$-tym ciągu Fareya. Wtedy prawdziwe są następujące stwierdzenia:

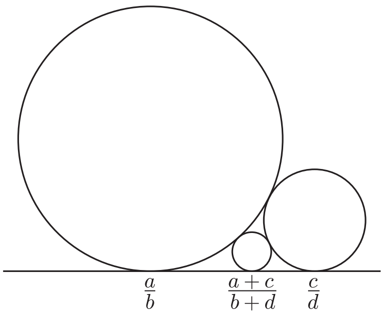
1. $bc - ad = 1$.

2. Jeżeli będziemy zwiększać $n$, to pierwszym ułamkiem jaki trafi między $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ będzie $\frac{(a+c)}{(b+d)}$.




Rys. 1

Chociaż własności zauważone przez Fareya wyglądają na pierwszy rzut oka zaskakująco, to okazuje się, że mają one stosunkowo prostą interpretację geometryczną. Opiera się ona na okręgach Forda – konstrukcji opisanej przez Lestera R. Forda w artykule w *American Mathematical Monthly* w 1938 roku. Okręgi Forda to okręgi styczne do prostej $OX$, których środki leżą w punktach $(p/q, 1/2q^2)$, gdzie $p/q$ to oczywiście ułamek w postaci nieskracalnej.

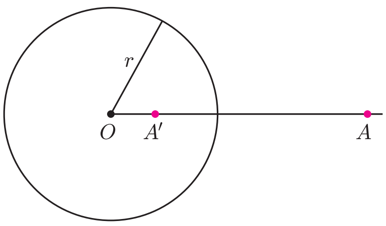



Rys. 2

Zadajmy sobie teraz pytanie: co okręgi Forda mają wspólnego z ułamkami Fareya? Aby na nie odpowiedzieć, narysujmy dwa okręgi Forda styczne do prostej $OX$ w punktach $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, a następnie zrzutujmy środek mniejszego z nich na ten promień większego, który jest prostopadły do prostej $OX$ (rys. 1). Teraz sprawdźmy co jest potrzebne do tego, by narysowane okręgi mogły być styczne do siebie. Z posiadanych informacji o okręgach Forda wynikają następujące równania:

$$AB = \frac{1}{2}(1/b^2 - 1/d^2), \qquad BC = c/d - a/b.$$

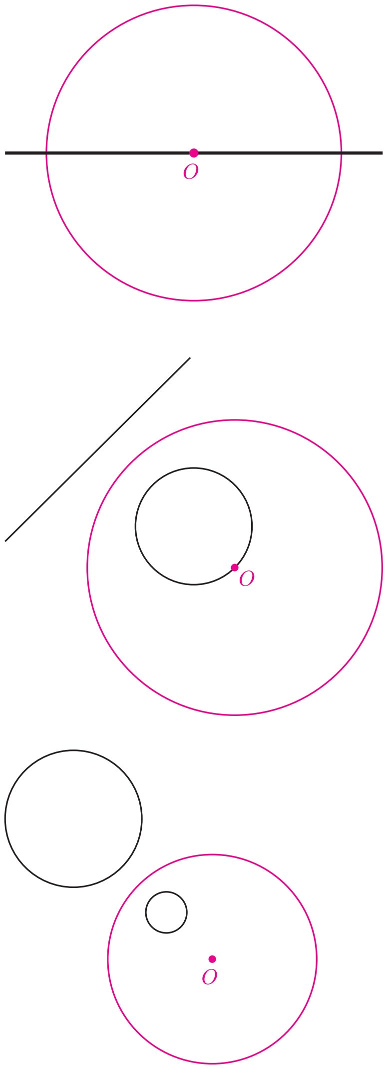
Twierdzenie Pitagorasa daje nam $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Aby okręgi były styczne potrzebna jest równość: $AC = \frac{1}{2}(1/b^2 + 1/d^2)$. Po kilku przekształceniach okazuje się, że okręgi są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy $bc - ad = 1$.
Z równania $bc - ad = 1$ wynikają równania: $(b+d)c - (a+c)d = 1$ oraz $(a+c)b - (b+d)a = 1$, które pozwalają udowodnić w analogiczny sposób jak wyżej, że okrąg Forda styczny do prostej $OX$ w punkcie $\frac{(a+c)}{(b+d)}$ jest styczny do obydwu okręgów już narysowanych (rys. 2).




Rys. 3

Aby zobaczyć, że okręgi Forda istotnie można uznać za rozwiązanie problemu sformułowanego przez Fareya należy odwołać się do własności inwersji. Inwersja względem okręgu o środku w punkcie $O$ i promieniu $r$ to przekształcenie, w którym obrazem punktu A jest taki punkt $A'$, który leży na półprostej $OA$ oraz spełnia warunek $OA \cdot OA' = r^2$ (rys. 3). Jeżeli do płaszczyzny dorzucimy jeden punkt „w nieskończoności”, to możemy przyjąć, że $O$ przechodzi na ten dodatkowy punkt, a jego obrazem przy inwersji jest $O$.

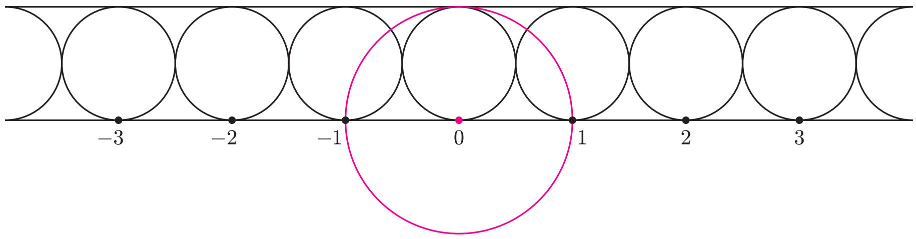
*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski




Rys. 4. Czarne figury są wzajemnie swoimi obrazami względem kolorowych okręgów.

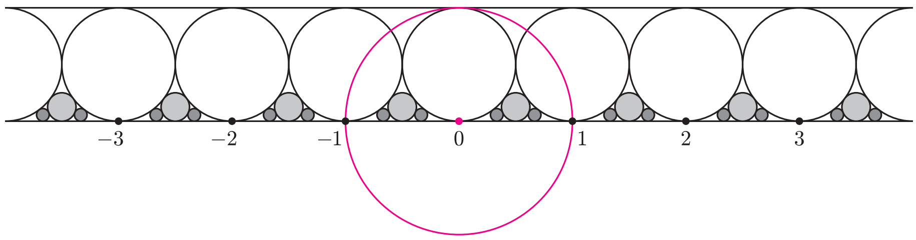
Inwersja ma kilka interesujących właściwości. Przede wszystkim inwersja złożona z drugą inwersją względem tego samego okręgu daje identyczność. Poza tym przekształca ona figury styczne na figury styczne. Kolejna pożyteczna własność to zachowanie inwersji względem prostych i okręgów – jeżeli figura (prosta, lub okrąg) zawierała środek okręgu, względem którego dokonano inwersji, to jej obrazem będzie prosta, a jeśli nie zawierała, to jej obrazem będzie pewien okrąg (rys. 4). Inną własnością inwersji jest konforemność, ale ta własność nie będzie nam potrzebna.

Narysujmy dwie proste: $y = 0$ oraz $y = 1$. Następnie narysujmy rodzinę okręgów stycznych do obydwu powyższych prostych w punktach, których współrzędna $x$ jest całkowita (nazwijmy ją rodziną $S$) oraz jeden duży okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1 (względem tego okręgu będziemy dokonywać inwersji). Efektem jest rys. 5.




Rys. 5

Rozpatrzmy teraz dwa przekształcenia: $L(x) = x + 1$ oraz $I(x) = 1/x$. Przekształcenia te opisują co dzieje się z pierwszą współrzędną punktu styczności okręgu stycznego do prostej $OX$ odpowiednio przy przesunięciach o wektor $(1, 0)$ i przy inwersji względem okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1. Dzięki wypisanym wcześniej własnościom inwersji możemy stwierdzić, że obrazami okręgów z rodziny $S$ po zadziałaniu dowolnym złożeniem przesunięć i inwersji będą okręgi styczne do prostej $OX$ i do innych okręgów stycznych do prostej $OX$ (rys. 6).



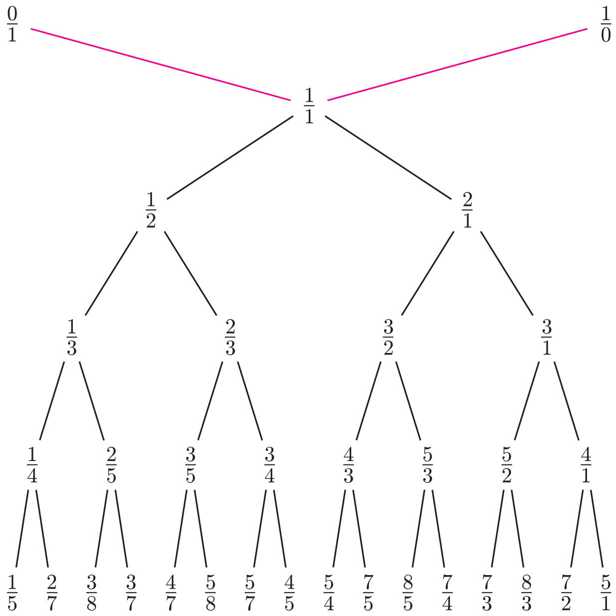

Rys. 6

Łatwo zauważyć, że powyższe okręgi będą styczne do prostej $OX$ w punktach $(x, 0)$ takich, że $x$ jest liczbą wymierną. Można zadać pytanie: Czy liczba $x$ musi spełniać jakiś dodatkowy warunek poza wymiernością, by istniał okrąg styczny do prostej $OX$ w punkcie $(x, 0)$ zgodny z powyższą konstrukcją? Okazuje się, że nie – każda liczba wymierna ma „swój” okrąg styczny. Aby to udowodnić wystarczy pokazać, że każdą liczbę wymierną można wyrazić za pomocą złożenia funkcji $L$ oraz $I$, gdzie punktem startu jest liczba zero. Pokażemy to na przykładzie liczby $9/14$:

$$\tfrac{9}{14} = \left(1 + \tfrac{5}{9}\right)^{-1} = \left(1 + \left(1 + \tfrac{4}{5}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(1 + \left(1 + \left(1 + \tfrac{1}{4}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \left(1 + \left(1 + (4)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1} = \left(1 + \left(1 + \left(1 + (4 + 0)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$$

Algorytm polega na odejmowaniu od danej liczby jej części całkowitej, a następnie odwracaniu części ułamkowej i powtarzaniu tych dwóch operacji, aż do otrzymania zera. Ponieważ początkowa liczba ma skończony licznik i mianownik, a w kolejnych krokach algorytm pracuje nad ułamkami o coraz mniejszych mianownikach, to powyższy proces dla każdej liczby wymiernej na pewno się zakończy. Co więcej prześledzenie kolejnych kroków powyższego




Rys. 7

algorytmu od końca wstecz pozwala skonstruować okrąg styczny w punkcie $(x, 0)$ za pomocą przesunięć oraz inwersji, zaczynając od okręgu stycznego w zerze.

Uważny Czytelnik z pewnością domyśla się już, co powyższa konstrukcja okręgów stycznych do prostej $OX$ ma wspólnego z ułamkami Fareya i okręgami Forda. Oczywiście skonstruowane w powyższy sposób okręgi są właśnie okręgami Forda, co wynika z pokazanych wcześniej własności oraz faktu, że okręgi styczne do prostej $OX$ w punktach $(x, 0)$ dla $x$ całkowitych mają promienie równe $1/2$. Z faktu, że każda liczba wymierna ma swój okrąg Forda oraz z udowodnionych wcześniej własności tychże okręgów wynikają pozytywne odpowiedzi na postawione przez Fareya pytania.

Pisząc o ułamkach Fareya oraz okręgach Forda należy wspomnieć, że zagadnienie to ma także inną interesującą interpretację, a mianowicie drzewo Sterna–Brocota. Jest to algorytm generujący liczby wymierne w sposób mechaniczny za pomocą zwiększania licznika i/lub mianownika (pomijamy powtórzenia) jak to pokazano na rys. 7.

Na zakończenie warto wspomnieć o pewnych wnioskach związanych z samą historią opisanego powyżej odkrycia. Pokazuje ono, że historia jako nauka, a w szczególności historia matematyki nie jest nauką sprawiedliwą – wszakże ten artykuł poświęcony był „ułamkom Fareya", a nie „ułamkom Harosa". Poza tym okazuje się, że nie trzeba być wielkim matematykiem, by zostać zapamiętanym. Najtrafniej oddaje to komentarz Hardy'ego: *Farey is immortal because he failed to understand a theorem which Haros had proved perfectly fourteen years before.*

**Bibliografia:**

John Conway, Richard Gay, *Księga liczb*, WNT, 2004

http://www.cut-the-knot.org/proofs/fords.shtml

http://www.cut-the-knot.org/blue/Farey.shtml

http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml

## Zadania

*Redaguje Ewa CZUCHRY*

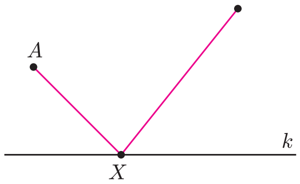
**F 717.** W szczelnej kolbie znajduje się woda o temperaturze 0°C. Po odpompowaniu z kolby powietrza cała woda zamarzła lub wyparowała. Jaka część wody wyparowała? Przyjąć, że nie było dopływu ciepła z zewnątrz, ciepło parowania wody w temperaturze $r = 0°\mathrm{C}$ to $2{,}54 \cdot 10^3$ J/g, a ciepło topnienia lodu $\lambda = 3{,}35 \cdot 10^3$ J/g.
Rozwiązanie na str. 6

**F 718.** 100 g lodu o temperaturze 0°C umieszczono w naczyniu nieprzewodzącym ciepła i poddano ciśnieniu $6 \cdot 10^7$ Pa. Jaka część lodu roztopi się? Przyjąć, że podwyższenie ciśnienia o $1{,}39 \cdot 10^7$ Pa sprawia, że temperatura topnienia lodu obniża się o 1°C. Ciepło właściwe lodu wynosi $c = 2{,}100$ J/(g · 1°C).
Rozwiązanie na str. 15

*Redaguje Waldemar POMPE*

**M 1207.** Rozstrzygnąć, czy istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n$, dla której liczba $7^n - 1$ jest podzielna przez $6^n - 1$.
Rozwiązanie na str. 15

**M 1208.** Na przyjęciu spotkało się $n$ osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznajomych posiada dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Wykazać, że wszystkie osoby obecne na przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.
Rozwiązanie na str. 24




**M 1209.** Dane są prosta $k$ oraz punkty $A$ i $B$ leżące po tej samej stronie prostej $k$ (rysunek). Na prostej $k$ wyznaczyć taki punkt $X$, dla którego wartość wyrażenia $AX^2 + BX^2$ jest najmniejsza.
Rozwiązanie na str. 24