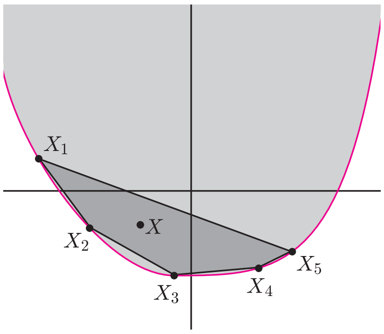
Nierówności na obrazkach

Marcin PILIPCZUK[*]

Nierówności bywają zaskakujące i nieraz trudno się domyślić, dlaczego miałyby być prawdziwe. Pokażemy pokrótce, że niejedną nierówność da się „zobaczyć" i, na obrazku, nagle wszystko wydaje się oczywiste.



Rys. 1

Większość Czytelników zna zapewne nierówność Jensena. W wersji podstawowej mówi ona, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to dla dowolnego n naturalnego, dla dowolnych $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ oraz dla dowolnych wag $t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$ o sumie 1, zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right).$$

Na początek pokażemy, że ta nierówność jest oczywista. Przypomnijmy, że funkcja wypukła f to taka funkcja ciągła, że zbiór punktów nad wykresem $A = \{(x, y) : f(x) \leqslant y\}$ jest zbiorem wypukłym. Zauważmy, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ punkt $\mathbf{X}_i = (x_i, f(x_i)) \in A$. Wobec tego, jeśli w punkcie $\mathbf{X}_i$ położymy wagę t_i, to środek ciężkości wag też będzie należał do A. Ten środek ma współrzędne:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{X}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)\right).$$

Skoro punkt $\mathbf{X}$ jest nad wykresem funkcji f, to

$$f\left(\sum_{i=t}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i).$$

Koniec dowodu. Całość przedstawia rysunek 1.

Z nierównością Jensena można już bardzo dużo. Przykładowo, rozważmy wariant zwykłej nierówności średnich mówiącej, że dla dowolnych $0 < p < q$, dla dowolnego n naturalnego, dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodzi:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Na rysunku lub różniczkując łatwo zobaczyć, że funkcja $f(x) = x^{\frac{q}{p}}$ jest wypukła dla $x > 0$. Zastosujmy nierówność Jensena dla $x_i = a_i^p$, powyższej funkcji f i wag $t_i = \frac{1}{n}$. Otrzymamy:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^q \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi $\frac{1}{q}$, otrzymamy żądaną nierówność.

Prawie tak samo dowodzimy klasycznej nierówności Cauchy'ego mówiącą, że dla dowolnego n naturalnego i dla dowolnych $a_1, \ldots, a_n > 0$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x) = -\ln x$ jest funkcją wypukłą dla $x > 0$. Zastosujmy nierówność Jensena dla tej funkcji, dla liczb $x_i = a_i$ i wag $t_i = \frac{1}{n}$. Otrzymamy, po przemnożeniu obu stron przez -1:

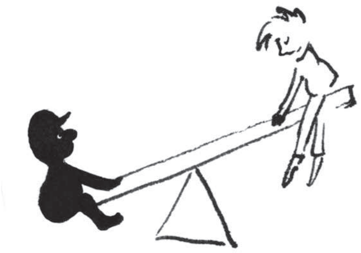
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant \ln \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Działając na obie strony rosnącą funkcją e^x, otrzymamy tezę.

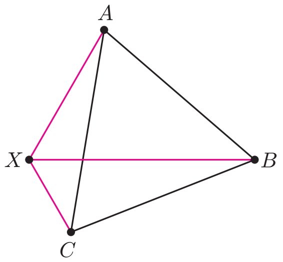
Teraz zastanówmy się nad trochę innym problemem. Weźmy okrąg o promieniu 1. Który z trójkątów wpisanych w niego ma największy obwód? Intuicja podpowiada, że pewnie równoboczny, tylko jak to uzasadnić? Jeśli α, β, γ będą kątami w tym trójkącie, to z twierdzenia sinusów obwód będzie

Rozwiązanie zadania F 717.
Aby bilans ciepła był zachowany, ciepło potrzebne do parowania może powstać jedynie kosztem ciepła wydzielonego podczas zamarzania wody, tzn. $\lambda m_1 = r m_2$, gdzie λ i r to odpowiednio ciepło topnienia lodu i parowania wody, a m_1 oraz m_2 to masy wody, która zamarzła/wyparowała. Zatem stosunek masy wody, która wyparowała m_2 do całkowitej masy wody znajdującej się w kolbie $m_1 + m_2$ jest równy:

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda}{\lambda + r} \approx 0{,}1.$$



[*]student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 2

wynosić $2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\gamma$. Zauważmy, że na odcinku $[0, \pi]$ funkcja $f(x) = -\sin x$ jest wypukła, zastosujmy więc nierówność Jensena dla tej funkcji, $n = 3$, wag $t_i = \frac{1}{3}$ i zmiennych α, β, γ. Otrzymamy, po przemnożeniu obu stron przez -1:

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant \sin\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Patrząc na obrazkowy dowód nierówności Jensena, łatwo zobaczyć, że równość zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.

Pozostawmy już nierówność Jensena i na koniec spróbujmy udowodnić „obrazkowo” następującą nierówność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Weźmy na płaszczyźnie punkty X, A, B, C tak, by:

- $|XA| = a$, $|XB| = b$, $|XC| = c$;
- $|\sphericalangle AXB| = \frac{\pi}{3}$, $|\sphericalangle BXC| = \frac{\pi}{3}$, $|\sphericalangle AXC| = \frac{2\pi}{3}$.

Wówczas, z twierdzenia cosinusów, mamy: $|AB| = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $|BC| = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ i $|AC| = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$, więc nasza nierówność to nierówność trójkąta w trójkącie ABC.

Czarne światło

Grzegorz DERFEL *

W typowym doświadczeniu, demonstrującym zjawisko ugięcia światła, na siatkę dyfrakcyjną pada wąska wiązka uformowana przez odpowiednią szczelinę. Szczelina ta stanowi źródło światła oświetlające wiele szczelin siatki. Patrząc z drugiej strony siatki widzimy obrazy tego źródła w postaci układu prążków. Środkowy prążek powstaje dzięki światłu, które nie doznaje ugięcia. Najjaśniejsze z symetrycznych bocznych prążków są efektem ugięcia tj. maksimami interferencyjnymi pierwszego rzędu.

Na co dzień dyfrakcję można zauważyć, obserwując latarnie świecące za oknem przesłoniętym cienką lecz gęsto tkaną firanką lub prześwitujące przez tkaninę parasola. (Mamy wtedy do czynienia z dwuwymiarową siatką dyfrakcyjną, która daje obrazy latarni ułożone w dwuwymiarową sieć.)

Z oczywistych przyczyn wspomniane obserwacje czyni się, gdy na dworze jest ciemno. Natomiast spoglądając przez firankę w dzień, można zauważyć inne zjawisko związane z dyfrakcją światła. Jeśli na tle jasnego nieba widoczny jest jakiś wydłużony obiekt (np. słup anteny na odległym dachu, przewód elektryczny, cienka gałąź itp.) to widać go wyraźnie jako ciemny kształt, któremu po obu bokach towarzyszą bledsze obrazy ułożone symetrycznie jak prążki dyfrakcyjne. Całość wygląda tak, jakby obserwowany obiekt był źródłem „czarnego światła”, które doznaje ugięcia przy przejściu przez firankę.

Żeby przeanalizować to zjawisko jakościowo, rozważmy siatkę dyfrakcyjną, przez którą oglądamy świecący ekran. (Rozmiary kątowe ekranu muszą być większe niż rozmiary kątowe dostrzegalnego obrazu dyfrakcyjnego.)

Światło pochodzące z takiego rozciągłego źródła pada na siatkę z różnych kierunków. Patrząc przez siatkę, widzimy jasne jednolite tło (tak jak widzimy niebo przez firankę). Spośród wszystkich promieni wydzielmy te, które pochodzą z wąskiego paska położonego naprzeciw nas i zbadajmy ich wkład do całego jasnego obrazu. Aby nabrać wyobrażenia o tym wkładzie, rozważmy wiązkę promieni padających na siatkę. Wiązka ta ulega ugięciu takiemu samemu jak światło pochodzące od szczeliny w doświadczeniu Younga, tj. daje obrazy wyróżnionego paska w postaci prążków występujących pod odpowiednimi kątami. Takie prążki pochodzące od wszystkich pasków składają się na jednolity obraz świecącego ekranu.

Jeśli rozciągłe źródło światła przesłonięte jest nieprzezroczystą przeszkodą o szerokości kątowej takiej, jak omawiany wąski pasek, to promienie z przesłoniętego obszaru nie dochodzą do siatki. W konsekwencji, w obrazie oglądanym przez siatkę brakuje odpowiadających im prążków, co narusza jednolitość tła. W miejscach, w których brakuje prążków natężenie światła o danej barwie jest mniejsze. Oznacza to, że obserwujemy ciemne obrazy przeszkody. Mają one postać ciemnych prążków, zupełnie tak, jakby przeszkoda była źródłem fal widocznych jako „czarne światło”. Jeśli ekran świeci światłem białym, to prążki są tęczowe, przy czym układ barw jest odwrotny niż w przypadku zwykłego ugięcia światła białego pochodzącego od szczeliny, tzn. czerwony prążek pojawia się pod kątem ugięcia mniejszym niż prążek niebieski. Można to ująć stwierdzeniem, że widziany przez siatkę ciemny obiekt na jasnym tle jest negatywem obrazu jasnego źródła, co przedstawia umieszczona na okładce para fotografii.

*Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka