# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2008

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
**547** ($WT = 1{,}04$) i **548** ($WT = 2{,}24$)
z numeru 10/2007

| | | |
|---|---|---|
| Marian Łupieżowiec | – Zebrzydowice | 43,55 |
| Paweł Kubit | – Kraków | 41,03 |
| Grzegorz Karpowicz | – Wrocław | 39,78 |
| Krzysztof Dorobisz | – Kraków | 39,72 |
| Jerzy Cisło | – Wrocław | 37,73 |
| Tomasz Tkocz | – Rybnik | 36,35 |

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

## Zadania z matematyki nr 563, 564

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**563**. Liczby całkowite $k$, $m$, $n$ spełniają równanie $\dfrac{m}{n} = \dfrac{k^2+m^2}{k^2+n^2}$ oraz warunek: $k^2+m^2+n^2$ jest liczbą pierwszą. Dowieść, że $m = n$.

**564**. W prostokącie o bokach długości $a$, $b$ poprowadzono skończoną liczbę odcinków równoległych do jego boków. Odcinki mogą się przecinać, żaden nie zawiera się w boku prostokąta, a suma ich długości jest równa $d$. Udowodnić, że wśród części, na które odcinki dzielą prostokąt, istnieje taka, której pole jest nie mniejsze niż

$$\left(\frac{2ab}{a+b+d}\right)^2.$$

Zadanie 564 zaproponował pan Tomasz K. Kujawa z Wrocławia.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2008

**555**. Niech $n$ będzie liczbą parzystą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną $k$ o tej własności, że w każdym $k$-elementowym podzbiorze zbioru $\{1,2,3,\ldots,3n\}$ znajdują się liczby $x, y$ (niekoniecznie różne), których suma albo różnica jest równa $n$.

**555.** Niech $n = 2m$. Wykażemy, że jeśli $K$ jest $k$-elementowym podzbiorem zbioru $\{1,\ldots,3n\}$, przy czym $k \geqslant 3m+1$, to istnieją takie liczby $x, y \in K$, że $x+y=n$ lub $x-y=n$.

Wystarczy w tym celu wziąć pod uwagę $m-1$ par

$$\{1,2m{-}1\},\ \{2,2m{-}2\},\ \ldots,\ \{m{-}1,m{+}1\}$$

oraz $2m$ par

$$\{2m{+}1,4m{+}1\},\ \{2m{+}2,4m{+}2\},\ \ldots,\ \{4m,6m\};$$

razem $3m-1$ par. Elementy każdej pary z drugiej serii różnią się o $2m$ (czyli $n$); zaś w każdej parze z pierwszej serii suma elementów wynosi $2m$. Gdy zbiór $K$ zawiera którąkolwiek z tych par, to mamy tezę.

Przypuśćmy więc, że tak nie jest; wówczas z każdej pary co najwyżej jeden element wchodzi do $K$. Jeżeli zbiór $K$ liczy więcej niż $3m$ elementów, to muszą w nim być co najmniej dwie liczby, niewystępujące w tych parach. Jedynymi takimi liczbami są: $m$ oraz $2m$; obie muszą znaleźć się w $K$. Biorąc $x=y=m$, mamy $x+y=n$; zatem i w tym przypadku zbiór $K$ ma własność, o którą chodzi.

Natomiast zbiór $k$-elementowy, gdzie $k \leqslant 3m$, już tej własności mieć nie musi. Przykład: zbiór

$$K_0 = \{1,2,\ldots,m{-}1\} \cup \{2m\} \cup \{4m{+}1,\ldots,6m\};$$

dla dowolnych $x, y \in K_0$ mamy $x+y \neq 2m$, $x-y \neq 2m$.

Odpowiedź: minimalna liczność zbioru o rozważanej własności jest równa $\frac{3}{2}n+1$.

Przypominamy treść zadań:

**556**. Dana jest liczba rzeczywista $a > 0$ oraz liczba całkowita $n > 0$. Udowodnić, że największa możliwa wartość iloczynu $x_1x_2\ldots x_n$, którego czynniki $x_i$ są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $x_1+\ldots+x_n \leqslant a$, wynosi $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor$.

**556.** Iloczyn $x_1x_2\ldots x_n$ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości, więc istnieje wśród nich wartość maksymalna $M$. Niech $z_1,\ldots,z_n$ będą liczbami naturalnymi o sumie $\sum z_i \leqslant a$, dla których $z_1z_2\ldots z_n = M$; można przyjąć, że $z_1 \geqslant z_i \geqslant z_n$ dla wszystkich $i$. Oczywiście $\sum z_i = \lfloor a \rfloor$ (gdyby ta suma była niewiększa od $\lfloor a \rfloor - 1$, to zwiększając $z_1$ o 1 dostalibyśmy nowy „dobry" ciąg $n$ liczb naturalnych, o iloczynie większym od $M$).

Ponadto $z_1 - z_n \leqslant 1$ (gdyby ta różnica wynosiła co najmniej 2, wówczas zastępując $z_1$ przez $z_1 - 1$, a $z_n$ przez $z_n + 1$, dostalibyśmy nowy „dobry" ciąg, o iloczynie większym od $M$).

Zapiszmy liczbę $\lfloor a \rfloor$ w postaci $qn + r$ (dzielenie z resztą); $q$, $r \geqslant 0$ całkowite, $r < n$. Z uzyskanych wcześniej warunków wynika, że w ciągu $(z_1,\ldots,z_n)$ jest $n-r$ liczb równych $q$ oraz $r$ liczb równych $q+1$. Zatem $M = z_1z_2\ldots z_n = q^{n-r}(q+1)^r$.

Oznaczając $a - \lfloor a \rfloor = \delta$ $(0 \leqslant \delta < 1)$, otrzymujemy równości

$$\frac{a+k}{n} = \frac{(qn+r+\delta)+k}{n} = q + \frac{r+k+\delta}{n}$$

dla $k = 0,1,\ldots,n{-}1$,

$$\left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r+k+\delta}{n} \right\rfloor = \begin{cases} q+0 & \text{dla } k < n-r, \\ q+1 & \text{dla } k \geqslant n-r, \end{cases}$$

i ostatecznie

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = \prod_{k=0}^{n-r-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor \cdot \prod_{k=n-r}^{n-1} \left\lfloor \frac{a+k}{n} \right\rfloor = q^{n-r}(q+1)^r = M.$$

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2008

## Zadania z fizyki nr 458, 459

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

**460**. – Za gorąca jest ta kawa, zaczekam parę minut, aż się ochłodzi – powiedział Andrzej.

– Albo niech doleje Pan sobie mleka, będzie chłodniejsza – zaproponowała Elżbieta. – Akurat pozostało go trochę w filiżance.

– Zrobię jedno i drugie, boli mnie język – zdecydował Andrzej.

– Najlepiej niech Pan najpierw zaczeka, a potem dobierze mleka – wtrącił się Krzysztof. – Kawa szybciej stygnie, gdy jest gorąca.

– To prawda, ale można też część kawy wlać od razu do mleka – powiedziała Elżbieta. – Wtedy będą stygnąć dwa naczynia, a nie jedno. Potem zleje Pan oba do jednej filiżanki.

Która osoba ma rację – Krzysztof, czy Elżbieta? Jeśli Elżbieta, to ile kawy trzeba przelać na początku? Jaką najniższą temperaturę całości można osiągnąć? Wystarczy rozwiązanie numeryczne, przy następujących wartościach danych: masa kawy 150 g, jej temperatura początkowa 100°C, masa mleka 50 g, temperatura mleka (równa temperaturze otoczenia) 20°C, czas stygnięcia 5 minut. Ciepło właściwe kawy i mleka jest jednakowe, a tempo odpływu ciepła do otoczenia nie zależy od ilości płynu w naczyniu, jest proporcjonalne do różnicy temperatur i takie, że jeśli początkowo pozostawimy kawę w całości, to po minucie jej temperatura spadnie do 95°C. Pominąć pojemność cieplną samych naczyń.

**461**. W kubku, którego wewnętrzna powierzchnia jest walcem, znajdują się dwie kule. Suma średnic kul jest większa od wewnętrznej średnicy kubka. Czy możliwe jest, że kule nie wypadną z kubka odwróconego do góry dnem?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/2008

Przypominamy treść zadań:

**452.** Mały ciężarek wisi na nici o długości $l$ i kołysze się z amplitudą kątową $\alpha_0$. Aby rozkołysać go mocniej, wprawiamy punkt zawieszenia w ruch harmoniczny o amplitudzie $b$ i odpowiednio dobranej częstotliwości oraz fazie. Jaką maksymalną amplitudę kątową $\alpha_1$ ciężarek może osiągnąć po czasie $t$? Wystarczy odpowiedź przybliżona, dla małej wartości $b$, a dużej (znacznie większej od okresu drgań) wartości $t$. Obie amplitudy wahań – początkowa $\alpha_0$ i końcowa $\alpha_1$ – są niewielkie. Zadanie ma dwa warianty, w których punkt zawieszenia porusza się wzdłuż prostej: a) poziomej, b) pionowej.

**453.** Koc elektryczny zawiera dwa obwody oporowe i przełącznik mocy grzania o 4 pozycjach. Jeśli minimalna moc wynosi $P_1 = 50\,\mathrm{W}$, a maksymalna $P_4 = 300\,\mathrm{W}$, to jakie są wartości dwóch pośrednich wartości mocy?

**452**. a) Jeśli amplituda kątowa jest równa $\alpha$, to w przybliżeniu małych wychyleń współrzędna pozioma położenia ciężarka zależy od czasu zgodnie ze wzorem $x = l\alpha\sin\omega t$. Współrzędna pozioma siły pochodzącej od punktu zawieszenia jest więc opisana wyrażeniem

$$F = ma_x = -ml\alpha\omega^2\sin\omega t = -mg\alpha\sin\omega t$$

W przybliżeniu wzór ten obowiązuje także dla ruchomego punktu zawieszenia, pod warunkiem, że te ruchy są niewielkie (małe $b$). Rozkołysanie wahadła wymaga dostarczenia mu energii, zgodnie ze wzorem

$$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = P = Fv$$

gdzie $v$ jest prędkością punktu zawieszenia. Widzimy, że energia jest przekazywana najszybciej wtedy, gdy częstotliwość ruchu punktu zawieszenia jest równa częstotliwości wahań (warunek rezonansu), a faza prędkości jest zgodna z fazą siły i przeciwna do fazy wychylenia wahadła, tzn. $v = -b\omega\sin\omega t$. Średnią wartością funkcji $\sin^2\omega t$ jest $\frac{1}{2}$, zatem uśredniona po jednym okresie moc $P$ jest równa

$$P_{\text{śr}} = \frac{1}{2}mg\alpha b\omega.$$

Przyrównujemy $P_{\text{śr}}$ do $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$, gdzie $\mathrm{d}t$ jest jednym okresem wahań lub jego wielokrotnością (jest to jednak czas na tyle krótki, aby amplituda $\alpha$ nie zmieniła się znacząco). Podstawiamy energię drgań $E = \frac{1}{2}mgl\alpha^2$ i rozwiązujemy równanie, dochodząc do wyniku

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{b\omega t}{2l}.$$

b) Oznaczmy przez $\varphi$ chwilową wartość kąta odchylenia wahadła od pionu, a przez $\Omega$ – prędkość kątową wahadła. Wielkości te zależą od czasu według wzorów

$$\varphi = \alpha\sin\omega t, \qquad \Omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \alpha\omega\cos\omega t.$$

Siła napięcia nici $F$ jest sumą odpowiedniej składowej siły ciężkości i siły odśrodkowej

$$F = mg\cos\varphi + m\Omega^2 l.$$

Jej pionową składową $F_y$ otrzymamy mnożąc $F$ przez $\cos\varphi$, a po podstawieniu powyższych wyrażeń na $\varphi$ i $\Omega$ mamy

$$F_y = mg\cos^2(\alpha\sin\omega t) + m\alpha^2\omega^2 l\cos^2\omega t\cos(\alpha\sin\omega t)$$

Jak poprzednio, należy obliczyć średnią moc przekazywaną wahadłu przez ruchy punktu zaczepienia, czyli uśrednić po czasie wyrażenie $P = F_y v$. Równowagowa (stała) wartość $F_y = mg$ się wtedy wyzeruje, a z reszty należy – zgodnie z założeniem o niewielkiej wartości amplitudy wychyleń $\alpha$ – zachować wyrazy najniższego rzędu względem $\alpha$, tzn. kwadratowe. Wynikiem jest

$$F_y = mg(1 + \alpha^2\cos 2\omega t).$$

Widać, że tym razem należy wybrać częstotliwość drgań punktu zawieszenia równą $2\omega$, zgodnie ze wzorem $v = 2b\omega\cos 2\omega t$. Średnia moc wynosi $P_{\text{śr}} = mgb\omega\alpha^2$, a rozwiązaniem równania różniczkowego $P_{\text{śr}} = \mathrm{d}E/\mathrm{d}t$ jest $\alpha_1 = \alpha_0 e^{b\omega t/l}$. Oczywiście tym razem wzrost amplitudy może nastąpić tylko pod warunkiem niezerowej wartości początkowej.

**453**. Maksymalna moc wystąpi wtedy, gdy obwody zostaną dołączone do sieci równolegle, a minimalna – gdy zostaną dołączone szeregowo. Oznaczając ich opory jako $R$ i $R'$, a napięcie źródła jako $U$ mamy

$$P_1 = \frac{U^2}{R + R'} \qquad P_4 = U^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$$

W wyniku przekształcenia tych równań otrzymujemy

$$P_2 = \frac{U^2}{R} = \frac{1}{2}\left(P_4 - \sqrt{P_4^2 - 4P_1P_4}\right) = 63\ \mathrm{W}$$

$$P_3 = \frac{U^2}{R'} = \frac{1}{2}\left(P_4 + \sqrt{P_4^2 - 4P_1P_4}\right) = 237\ \mathrm{W}.$$

Wyniki te obowiązują przy założeniu, że opory mają wartość stałą (niezależną od temperatury).