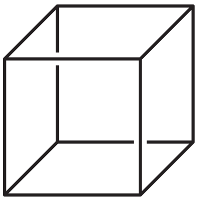
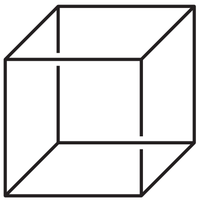
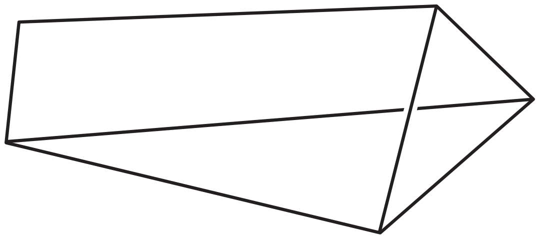
Czy to może być wielościan?

Przeważnie rysujemy wielościany w ten sposób, że nakreślone są tylko ich krawędzie, a dokładniej – rzuty ich krawędzi na płaszczyznę rysunku. Dla większej plastyczności rysunku rzuty krawędzi położonych z tyłu przerywamy, gdy biegną za krawędziami położonymi z przodu. Każdy wie, że rzut nawet mocno pogiętego drutu na płaszczyznę może być odcinkiem – z tego wynika, iż nie można mieć pewności, że nawet taki rysunek, jak obok, to rysunek sześcianu. Ale wiemy, że to MOŻE BYĆ rysunek sześcianu. Natomiast każdy przyzna, że nie istnieją wielościany, których rysunki mogłyby wyglądać tak, jak niżej.

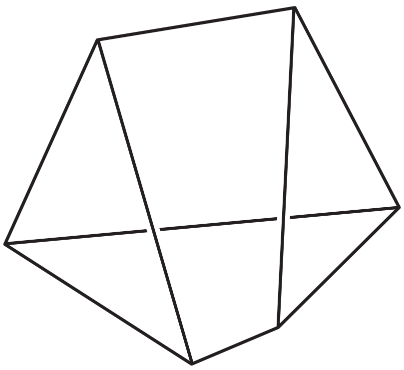


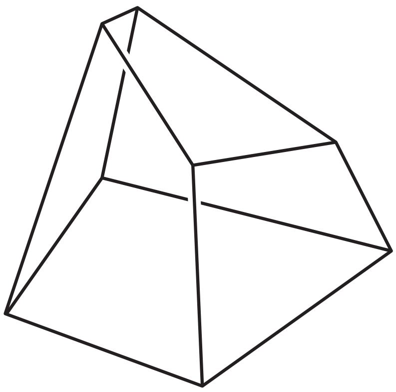


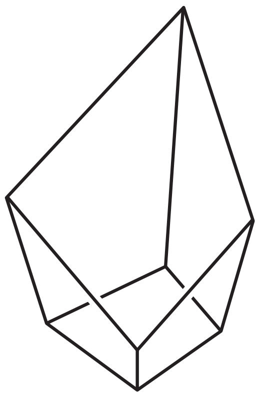


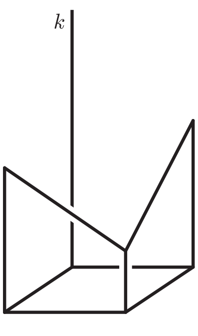
Każdy to przyzna, ale gdyby ktoś uparty znienacka zapytał, dlaczego, to jak mogłaby wyglądać odpowiedź?

Pozostawiam sformułowanie tej odpowiedzi Czytelnikom, natomiast proponuję zadania, w których odpowiedź nie jest już tak oczywista (choć, być może, Czytelnik Przenikliwy będzie ją znał od razu). Proszę rozstrzygnąć, *który z poniższych trzech rysunków może być rysunkiem wielościanu.*







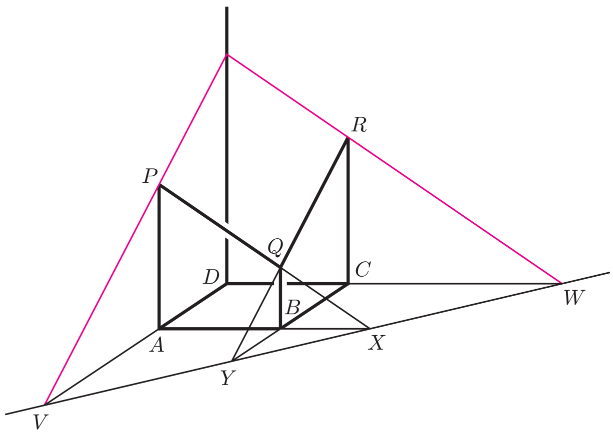


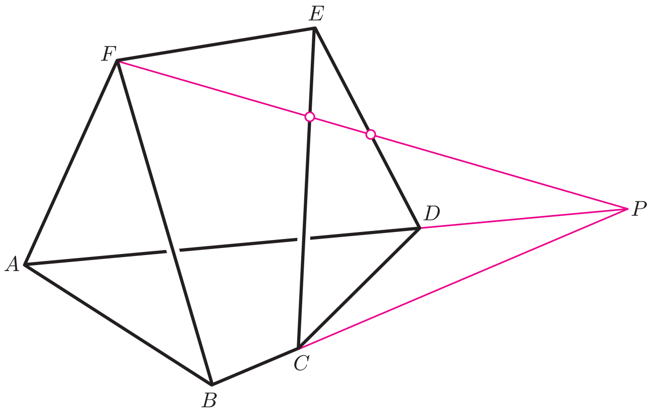
Dla tych, którzy będą mieli chwilę wahania, jak zabrać się do tego zadania, proponuję jako wskazówkę …kolejne zadanie: *w którym z punktów prostej k leży czwarty wierzchołek górnej podstawy narysowanego obok graniastosłupa?*

I jeszcze przypomnę:
• nierównoległe proste przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy leżą na jednej płaszczyźnie,
• dwie różne płaszczyzny, mające punkt wspólny, mają wspólną prostą.

Oto rozwiązania:

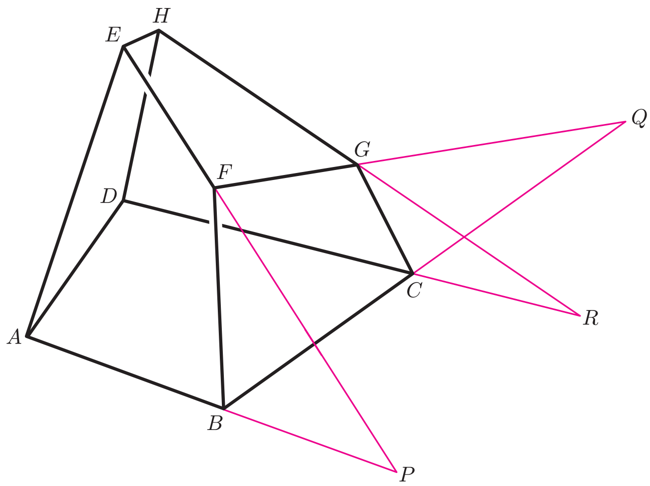
Proste AB i PQ leżą na jednej płaszczyźnie i nie są równoległe, więc przecinają się w punkcie X, podobnie BC i QR w punkcie Y. Punkty X i Y leżą na płaszczyźnie dolnej i górnej podstawy, więc leży na nich cała prosta XY. Jej punkty V i W przecięcia odpowiednio z prostymi AD i CD leżą odpowiednio na ścianach ADP i CDR graniastosłupa. Zatem w prostych VP i WR zawierają się brakujące boki górnej podstawy, a ich przecięcie jest jej poszukiwanym czwartym wierzchołkiem (uwaga! prosta k wcale nie była nam potrzebna).



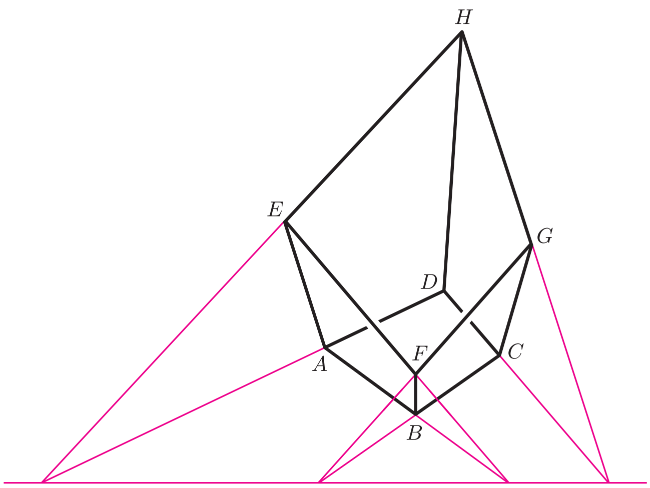


Załóżmy, że ściany $ABCD$, $ADEF$ i $BCEF$ są wielokątami, a więc są płaskie. Wówczas punkt P przecięcia prostych AD i BC leży na każdej z nich. Skoro tak, to prosta PF przecina zarówno CE (jako leżąca na $BCEF$), jak też DE (jako leżąca na $ADEF$). Stąd wszystkie punkty leżą na jednej płaszczyźnie i rysunek obok nie przedstawia wielościanu.

Zakładamy, że wszystkie ściany poza, być może, $EFGH$ są wielokątami, czyli w szczególności są płaskie. Wówczas proste AB i EF, BC i FG oraz CD i GH przecinają się odpowiednio w punktach P, Q oraz R. Gdyby wielokąt $EFGH$ był płaski, punkty te leżałyby na jednej prostej. Skoro tak nie jest, rysunek obok nie może przedstawiać wielościanu.



Jeśli wszystkie ściany poza, ewentualnie, $EFGH$ będą wielokątami, to okaże się, że i $EFGH$ może być wielokątem, bo wszystkie przecięcia odpowiednich dolnych i górnych krawędzi leżą na jednej prostej. Zatem rysunek obok może być rysunkiem wielościanu.



W ten sposób wszystkie zadania zostały rozwiązane i nie potrzeba było do tego nic więcej poza wyobraźnią.

Czytelnik Wnikliwy zapyta pewnie, czy uprawnione było przyjmowanie założenia, że prawie wszystkim narysowanym wielokątom odpowiadają w rzeczywistości wielokątne ściany. Otóż można tak robić w sytuacji, gdy do trzech punktów (które zawsze leżą na jakiejś płaszczyźnie) dobieramy czwarty, niezwiązany żadnymi dodatkowymi warunkami, poza tym, że wiemy, gdzie wypada jego rzut na kartkę rysunku. Jeszcze raz podkreślam – nie możemy wnioskować, że na tym czy innym obrazku jest wielościan, w uprawniony sposób można jedynie stwierdzić, że MOŻE tak być.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS