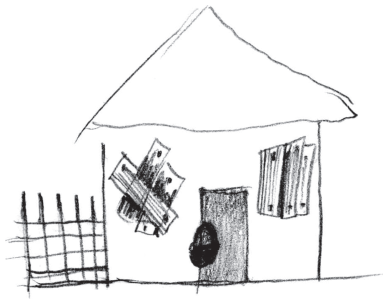
O rodzinach zamkniętych na sumy teoriomnogościowe

Adam DZEDZEJ *



Rozważmy skończoną rodzinę zbiorów $\mathcal{A}$. Przypuśćmy, że zbiory należące do tej rodziny mogą być nieskończone. Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ *rozróżnia* dwa dane elementy, jeśli istnieje zbiór $A \in \mathcal{A}$, który zawiera jeden z tych elementów, a nie zawiera drugiego. W naszych rozważaniach będziemy utożsamiać punkty, których rodzina nie rozróżnia, zatem możemy założyć, że nasz świat ($\bigcup \mathcal{A}$) jest skończony. Na przykład, jeśli rozważymy rodzinę osi układu współrzędnych w $\mathbb{R}^3$, to możemy ją utożsamić z rodziną $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, gdzie 1 odpowiada początkowi układu współrzędnych.

Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest *zamknięta na sumowanie*, jeżeli wraz ze zbiorami A i B do rodziny należy także $A \cup B$. Rodzina jest *nietrywialna*, jeżeli jej elementem jest jakiś niepusty zbiór. W 1979 roku została postawiona przez Petera Frankla następująca

Hipoteza (Union-Closed Sets Conjecture). Jeśli $\mathcal{A}$ jest nietrywialną rodziną zamkniętą na sumowanie, to istnieje element $x \in \bigcup \mathcal{A}$, który należy do przynajmniej połowy zbiorów z $\mathcal{A}$.

Mimo prostego sformułowania do dziś nikt nie wie, jak zabrać się do dowodu tej hipotezy. Jak to więc często bywa z problemami kombinatorycznymi, można ścigać się w częściowych wynikach. Dwa parametry, które się do tego nadają są oczywiste. Pierwszy to liczba zbiorów w $\mathcal{A}$, a drugi $|\bigcup \mathcal{A}|$. Wiadomo, że hipoteza zachodzi, jeśli rodzina $\mathcal{A}$ składa się z nie więcej niż 48 zbiorów. Ostatnio I. Bošnjak i P. Marković udowodnili hipotezę przy założeniu $|\bigcup \mathcal{A}| \leqslant 11$. A zatem jeśli hipoteza jest fałszywa, to najmniejszy kontrprzykład musi żyć na zbiorze minimum 12-elementowym i sama rodzina musi składać się z co najmniej 49 zbiorów.

Jeżeli do rodziny $\mathcal{A}$ należy zbiór jednoelementowy $\{x\}$, to zbiorów, do których należy x jest co najmniej połowa (ćwiczenie!). Podobnie jeżeli do rodziny należy jakiś zbiór dwuelementowy $\{x,y\}$, to dobrym wyborem będzie x lub y. Dalej już nie jest tak prosto. Istnieje taka rodzina $\mathcal{A}$, do której należy zbiór $\{x,y,z\}$, ale żaden z elementów x,y,z nie jest elementem połowy zbiorów z $\mathcal{A}$ (ćwiczenie: znaleźć taki przykład).

T. P. Vaughan zaproponowała definicję rodziny FC (od Frankl Conjecture). Rodzina $\mathcal{F}$ jest FC, jeśli jest zamknięta na sumowanie i ma następującą własność:

dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ zamkniętej na sumowanie, jeśli $\mathcal{A}$ zawiera $\mathcal{F}$, to pewien element $\bigcup \mathcal{F}$ należy do co najmniej połowy zbiorów z $\mathcal{A}$.

Nietrudno zauważyć, że jeśli rodzina zamknięta na sumowanie zawiera jakąś rodzinę FC, to spełnia hipotezę Frankla. Wiemy już, że rodziny $\{\emptyset, \{x\}\}$ oraz $\{\emptyset, \{x,y\}\}$ są rodzinami FC. Można myśleć o poszukiwaniu innych takich minimalnych rodzin FC. Kilka z nich, to:

- zbiór czteroelementowy wraz z trzema swoimi podzbiorami trzyelementowymi,
- zbiór pięcioelementowy wraz ze wszystkimi swoimi podzbiorami czteroelementowymi,
- dowolne trzy podzbiory trzyelementowe zbioru pięcioelementowego i wszystkie ich sumy,
- rodzina $\{\emptyset, \{a,b,c\}, \{a,d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,b,c,d,e\}\}$,
- dowolne cztery podzbiory czteroelementowe zbioru sześcioelementowego i wszystkie ich sumy.

R. Morris proponuje zawody w poszukiwaniu liczb $FC(k,n)$ $(k < n)$. Są to minimalne liczby takie, że rodzina generowana przez $FC(k,n)$ dowolnych podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego jest rodziną FC. Czytelnik sam zauważy, że $FC(1,n) = FC(2,n) = 1$. Z przykładu powyżej wynika, że $FC(3,4) = 3$. R. Morris znalazł wszystkie rodziny FC na zbiorze pięcioelementowym (jest 6 takich, które nie zawierają mniejszej rodziny FC). Z jego pracy wynika, że $FC(3,5) = 3$, $FC(4,5) = 5$ i $FC(3,6) = 4$. Pokazuje też, że jeśli $n \geqslant 2k-2$, to liczba $FC(k,n)$ rzeczywiście istnieje. To znaczy, że rodzina wszystkich podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego jest FC, a tym samym $FC(k,n) \leqslant \binom{n}{k}$. Dla kilku małych liczb znane są trochę lepsze oszacowania:

- $7 \leqslant FC(4,6) \leqslant 8$,
- $FC(3,7) \leqslant 6$,
- $FC(4,7) \leqslant 18$,
- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leqslant FC(3,n) \leqslant \frac{2n}{3}$, dla $n \geqslant 4$.

Wracając do właściwej hipotezy dodajmy, że dla dużych rodzin też niewiele wiadomo. E. Knill podał argument, z którego wynika, że dla rodziny złożonej z n zbiorów istnieje element, który należy do co najmniej

$$\frac{n-1}{\log_2 n}$$

z nich. P. Wójcik poprawił ten wynik ale praktycznie tylko o stały czynnik. Pokazał, że dla rodziny n zbiorów istnieje element, który należy do więcej niż

$$\frac{1+o(1)}{\log_2 \frac{4}{3}} \frac{n}{\log_2 n} > \frac{2{,}40942n}{\log_2 n}$$

spośród nich.

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Gdański