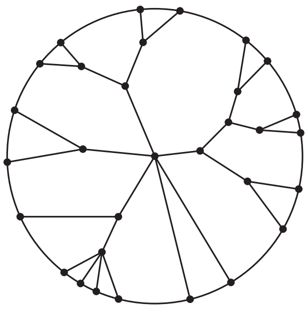
# O cyklach Hamiltona w grafach powstałych z drzew

Praca nagrodzona srebrnym medalem na XXIX Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki, Warszawa 2007. Rozszerzona wersja tej pracy została zakwalifikowana do finału Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej w Kopenhadze.

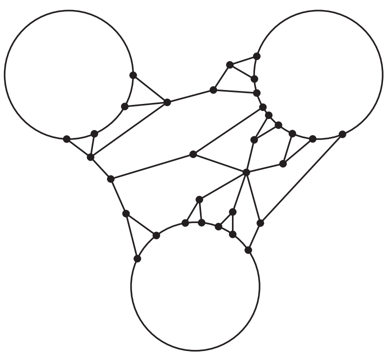
*Magdalena BOJARSKA*

Moja praca dotyczy teorii grafów. Na początek przypomnę pewne pojęcia tej teorii. *Drzewo* jest to spójny graf bez cykli. *Liściem* drzewa nazywamy wierzchołek stopnia 1, czyli taki, z którego wychodzi dokładnie jedna krawędź. *Węzłem* drzewa nazywamy każdy wierzchołek drzewa, który nie jest liściem. Przypomnijmy też, że *cykl Hamiltona* jest to cykl, który przechodzi dokładnie jeden raz przez każdy wierzchołek grafu. W mojej pracy zajmowałam się szukaniem cykli Hamiltona w grafach Halina oraz uogólnionych grafach Halina. *Grafem Halina* nazywamy graf powstały w wyniku połączenia cyklem liści drzewa, w którym stopień każdego węzła drzewa jest równy co najmniej 3. Umówmy się zatem, że liściem w grafie Halina będziemy nazywać każdy wierzchołek, który był liściem w drzewie, z którego powstał graf, natomiast węzłem każdy inny wierzchołek.



Rys. 1. Przykład grafu Halina.

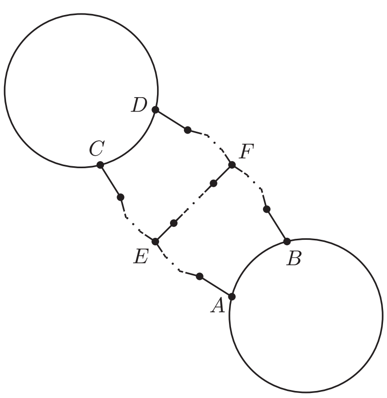
W mojej pracy dowodzę, że w każdym grafie Halina istnieje cykl Hamiltona. Pokażę teraz szkic dowodu tego twierdzenia, który przeprowadzę przez indukcję względem liczby węzłów grafu. Przyjmijmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego grafu o $n$ węzłach. Niech graf $G$ będzie grafem Halina o $n+1$ węzłach. Można udowodnić, że wśród węzłów tego grafu istnieje taki, który sąsiaduje z dokładnie jednym innym węzłem, a pozostałe wychodzące z niego krawędzie prowadzą do liści. Usuwając teraz wszystkie liście sąsiadujące z takim wierzchołkiem, spowodujemy, że on sam stanie się liściem, a zatem umieszczamy go na okręgu. Na mocy założenia indukcyjnego w tak powstałym grafie istnieje cykl Hamiltona. Następnie przywracamy usunięty fragment i na mocy nietrudnych do wymyślenia konstrukcji budujemy cykl Hamiltona w wyjściowym grafie $G$ na podstawie tego istniejącego w grafie o $n$ węzłach. Dokończenie dowodu pozostawiam Czytelnikowi.



Rys. 2. Przykład uogólnionego grafu Halina stopnia 3.

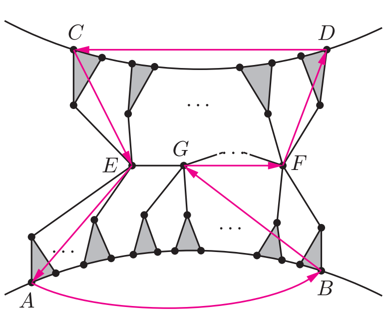
*Uogólnionym grafem Halina stopnia $n$* nazywamy płaski graf powstały poprzez umieszczenie liści pewnego drzewa (każdy węzeł tego drzewa ma stopień co najmniej 3) na $n$ rozłącznych okręgach, leżących na zewnątrz siebie. Naturalnym uogólnieniem rozważanego powyżej problemu jest pytanie, czy istnieje cykl Hamiltona w uogólnionych grafach Halina. Mnie udało się znaleźć warunek konieczny i dostateczny na istnienie cyklu Hamiltona w uogólnionych grafach Halina stopnia 2. Otóż:

*W uogólnionym grafie Halina stopnia* 2 *istnieje cykl Hamiltona wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie tym nie istnieje wierzchołek rozspajający.*




Rys. 3

Tak jak poprzednio, pokażę tutaj jedynie szkic dowodu. Jeżeli w grafie istnieje wierzchołek rozspajający, czyli taki, którego usunięcie powoduje rozpad grafu na co najmniej 2 części, to teza jest oczywista – w grafie nie może istnieć cykl Hamiltona. Ten warunek jest powszechnie znany i odnosi się do wszystkich grafów. Jeżeli natomiast w uogólnionym grafie Halina stopnia 2 nie istnieje wierzchołek rozspajający, to można udowodnić, że w każdym takim grafie można znaleźć ścieżki $AC$, $BD$ i $EF$ pokazane na rysunku 3, przy czym każdy wierzchołek należący do którejś z tych ścieżek jest korzeniem drzewa, którego wszystkie liście leżą na jednym z okręgów (jeden wierzchołek może być korzeniem kilku drzew), a także żadne liście nie leżą na dłuższych łukach $AB$ i $CD$. Następnie przez $G$ oznaczmy wierzchołek sąsiadujący z wierzchołkiem $E$ na ścieżce $EF$. Załóżmy również, że węzeł $G$ jest korzeniem drzewa o liściach na okręgu, do którego należą liście $A$ i $B$. Wtedy zaczynamy cykl Hamiltona w wierzchołku $B$. Następnie przez wszystkie wierzchołki (z wyjątkiem korzeni) drzew, których liście leżą na łuku $AB$, aż do ostatniego drzewa o korzeniu w węźle $G$, przechodzimy do wierzchołka $G$ (w pracy dowodzę, że takie przejście jest możliwe). Następnie, po ścieżce $EF$, z wierzchołka $G$ do $F$, dalej do liścia $D$, z liścia $D$, przez wszystkie wierzchołki należące do drzew, których liście leżą na łuku $CD$ do liścia $C$, z wierzchołka $C$ do liścia $A$ i, zamykając cykl, do $B$ krawędzią bezpośrednio łączącą liście $A$ i $B$ (rys. 4). W ten sposób pokazałam konstrukcję cyklu Hamiltona w uogólnionym grafie Halina stopnia 2.




Rys. 4. Etapy budowania cyklu Hamiltona w uogólnionym grafie Halina stopnia 2. Zacieniowane trójkąty symbolizują drzewa.