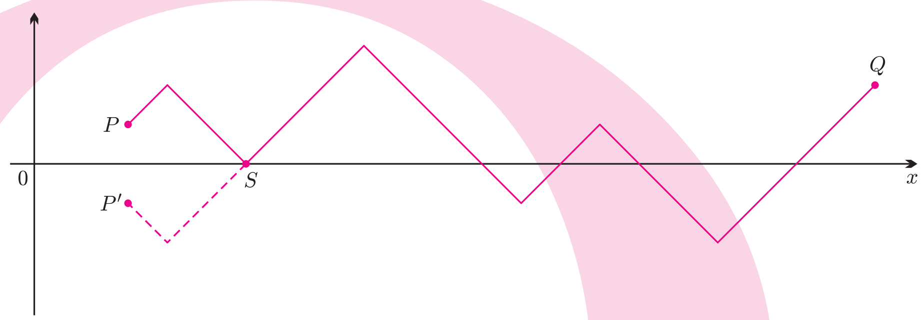
Lemat o głosowaniu – zasada odbicia

Rafał SZTENCEL

Na kandydata A oddano a głosów, na kandydata B b głosów, przy czym $a > b$. Jaka jest szansa, że podczas obliczania głosów kandydat A będzie cały czas prowadził?

Obliczanie głosów możemy przedstawić jako drogę w układzie współrzędnych (podobnie jak historię meczu tenisowego Agnieszki i Bolka z poprzedniego odcinka). Punktem startowym drogi jest $(0, 0)$, głos na A zwiększa współrzędną y o 1, głos na B zmniejsza ją o 1, współrzędna x zawsze rośnie o 1. Zadanie sprowadzi się wtedy do obliczenia, ile dróg nieprzecinających osi OX prowadzi z punktu P do Q. Może nam w tym pomóc następująca

Zasada odbicia. Liczba dróg z P do Q, które dotykają lub przecinają oś OX, jest równa liczbie dróg z P' do Q.



Rysunek pokazuje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie między drogami należącymi do obydwu kategorii. Punkt S jest punktem pierwszego kontaktu drogi z osią OX.

Możemy teraz rozwiązać zadanie. Punktem końcowym każdej drogi opisującej historię głosowania jest $(a + b, a - b)$. Wszystkich dróg jest więc $\binom{a+b}{a}$.

Jeśli A ma cały czas prowadzić, to droga musi przejść przez punkt $(1, 1)$. Dróg z $(1, 1)$ do $(a + b, a - b)$, które dotykają lub przecinają oś OX jest – na mocy zasady odbicia – tyle, ile wszystkich dróg z $(-1, 1)$ do $(a + b, a - b)$. Każda taka droga składa się z a odcinków „w górę" i $b - 1$ odcinków „w dół", zatem interesujących nas dróg jest $\binom{a+b-1}{b-1}$. Wszystkich dróg z $(1, 1)$ do $(a + b, a - b)$ jest oczywiście $\binom{a+b-1}{a-1}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo p tego, że A będzie cały czas prowadził:

$$p = \frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{b-1}}{\binom{a+b}{a}} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Żeby docenić zasadę odbicia, Czytelnik może poszukać innego rozwiązania – na przykład ułożyć równania ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (to często stosowana metoda, za pomocą której można rozwiązać np. klasyczne zadanie o ruinie gracza).

Feller [1] określa zasadę odbicia jako „niepozorny lemat podany przez Bertranda w 1887 roku", który dostarczy nam „zadziwiającego bogactwa informacji dotyczących fluktuacji losowych". Sama zasada odbicia przypisywana jest Desiré André (1887). Zadanie, przytoczone na początku, znane jest w literaturze jako lemat o głosowaniu.

Na zakończenie pytanie: jeśli głosowanie zakończyło się remisem, to jakie są szanse możliwych $n + 1$ wyników prowadzenia: $2n : 0$, $2n - 2 : 2$, ..., $0 : 2n$? Zajmiemy się tym następnym razem.

Bibliografia

[1] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, wyd. II, PWN, Warszawa 1966