Niech $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$. Bystry Czytelnik może zgadnąć, jaki jest punkt okresowy bliski s, jeśli zastanowi się nad definicją odległości w przestrzeni A. Waga, z jaką wliczamy różnice na kolejnych miejscach badanych ciągów, jest coraz mniejsza. Oznacza to, że ciągi, które są blisko, nie mogą się różnić na miejscach początkowych. Wybierając $t = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_1, s_2, \ldots)$, dostaniemy $d(s,t) < 2^{-n} < \varepsilon$. Dostaliśmy więc jawny wzór na punkt okresowy dowolnie bliski dowolnego s, co właśnie oznacza gęstość zbioru punktów okresowych w dziedzinie.

Ciekawe, czy tak samo łatwo uda się nam znaleźć gęstą orbitę? Z jakiego ciągu musimy wystartować, żeby przez obcinanie pierwszych miejsc „podejść blisko” do każdego ciągu w dziedzinie? Chwila namysłu pozwala stwierdzić, że ten punkt musi mieć „zapisany” w sobie początek każdego możliwego punktu, czyli ciąg zer i jedynek o każdej długości. Uporządkujmy więc wszystkie skończone ciągi zerojedynkowe tak, aby były coraz dłuższe – najpierw jednoelementowe, czyli 0 i 1, potem dwuelementowe, czyli 00, 01, 10, 11, i tak dalej. Dostajemy

$$s^* = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Jeśli $s \in A$, to znajdziemy takie r, że $d(\sigma^r(s^*), s) < 2^{-n} < \varepsilon$. Rzeczywiście, obcinając kolejne pierwsze liczby, otrzymamy początek dowolnego ciągu, czyli – zapisując formalnie – kolejne iteracje wykonywane na s^* tworzą gęstą orbitę.

Zostało nam sprawdzenie wrażliwości na małe zmiany warunków początkowych – weźmy więc takie $s, t \in A$, że $d(s,t) < \varepsilon$ i sprawdźmy, czy zawsze istnieje takie m, że po m iteracjach obrazy tych punktów będą daleko od siebie.

Z poprzednich rozważań wiemy już, że takie punkty powinny mieć na początku takie same wyrazy, a potem różne, czyli, na przykład, $t_i = s_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, a następnie $t_{n+1} = 1 - s_{n+1}$. Wtedy $d(t,s) < \varepsilon$, ale $d(\sigma^{n+1}(t), \sigma^{n+1}(s)) \geqslant 1$. Przeprowadzenie rachunków pozostawiamy Dociekliwemu Czytelnikowi.

To jest już cały dowód – pokazaliśmy, że badane przekształcenie jest chaotyczne.

Podobnie łatwo można pokazać ciągłość tego przekształcenia. Dokładnemu Czytelnikowi proponujemy zastanowić się, w jaki sposób można oszacować $d(\sigma(s), \sigma(t))$ przez $d(s,t)$.

To jest właśnie chaos w rozumieniu matematyka. Okazuje się, że można go zobaczyć na własne oczy… Nie było tak strasznie, prawda?

Laboratorium Tatrzańskie (2)

Grzegorz DERFEL

Instytut Fizyki, Politechnika Łódzka

Deszcz padający do góry

Klimat tatrzański charakteryzuje się znaczną wilgotnością. Woda w stanie ciekłym występuje w atmosferze w postaci opadów, mgieł i oczywiście chmur. Gwałtowne, choć krótkotrwałe ulewy są spektakularne (i łatwiejsze do zaakceptowania niż trzydniowy kapuśniaczek). Łatwo zauważyć, że duże krople opadające podczas takich nawałnic uderzają w ziemię ze znacznie większą prędkością niż drobne kropelki mżawki. Zdarza się, że bardzo drobne, lecz jeszcze dostrzegalne gołym okiem kropelki, tworzące „gruboziarnistą” mgłę, unoszą się długo w powietrzu i trudno stwierdzić ich opadanie. Mleczne tumany, które unoszą się nad górskimi grzbietami, utworzone są z drobniutkich kropelek, których ruchem rządzą przede wszystkim wiatr i prądy powietrzne, a nie siła grawitacji. W Tatrach pogoda zmienia się dynamicznie, więc można być świadkiem wszystkich tych efektów podczas jednej wycieczki.

Powyższe zestawienie pokazuje, że prędkość ruchu kropel względem powietrza, jaką obserwujemy przy opadaniu w pobliżu gruntu, zależy od ich promienia. Jest to przejawem prawidłowości polegającej na tym, że siła oporu lepkiego F, jakiego doznaje kropla ze strony powietrza, rośnie z jej prędkością v. Dla małych kropelek i niewielkich prędkości zależność ta jest dobrze opisana wzorem Stokesa: $F(v) = 6\pi\mu r v$, gdzie μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej powietrza ($\mu = 1{,}78 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Ns/m^2}$ przy 20°C). Siła ta działa przeciwnie do prędkości i wraz z ciężarem decyduje o ruchu kropli względem powietrza. (Pomijamy tu wypór, jaki działa na kroplę zanurzoną w powietrzu,

Rozwiązanie zadania F 715.
Gwiazdy poruszają się po okręgach o promieniach r_1 i r_2. Te okręgi mają wspólny środek, jest nim środek masy układu. Odległość między gwiazdami jest więc stale równa $r_1 + r_2$. Zatem:

$$\frac{m_{1,2}v_{1,2}^2}{r_{1,2}} = G\frac{m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2},$$

$$r_{1,2} = \frac{v_{1,2}}{\omega} = \frac{T}{2\pi}v_{1,2}.$$

Stąd:

$$r_1 + r_2 = \frac{T}{2\pi}(v_1+v_2),$$

$$m_{1,2} = \frac{Tv_{2,1}}{2\pi G}(v_1+v_2)^2.$$

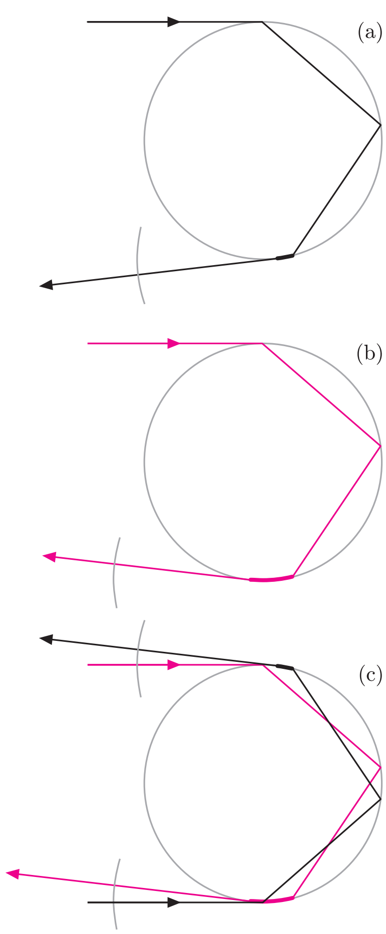
ponieważ jest on trzy rzędy wielkości mniejszy niż ciężar $G = (4/3)\pi r^3\gamma$, gdzie γ jest ciężarem właściwym wody.)

Ruch kropli deszczu w jej pionowym locie ku ziemi jest ruchem zmiennym opisanym równaniem Newtona $ma = G - F(v)$. Ponieważ przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu, $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$, więc równanie to określa prędkość jako funkcję czasu. Jego rozwiązanie pokazuje, że po dostatecznie długim czasie prędkość każdej spadającej kropli ustala się i przyjmuje wartość zależną od promienia, $v_\infty = (2\gamma/9\eta)r^2$. Można uznać, że czas lotu kropli ku ziemi spełnia ten warunek i przyjąć, że ruch jej jest jednostajny, co oznacza praktyczne zrównanie wartości sił F i G. Z równości tej wynika, że prędkość tego ruchu rośnie ze wzrostem rozmiaru kropli. Dla bardzo małych kropelek jest ona proporcjonalna do kwadratu promienia. Tłumaczy to wymienioną na wstępie różnicę między rzęsistym a drobnym deszczem, oraz fakt, że kropelki mgły opadają nadzwyczaj powoli. Szczególne zjawisko można zaobserwować na zboczu góry, gdy wiatr wieje ku grani. Szybko wznoszące się powietrze porywa nawet znaczne krople, ponieważ siła oporu przewyższa ich ciężar. Wynikiem jest deszcz unoszący się do góry.

Takiemu samemu prawu podlegają wszelkie inne cząstki w powietrzu. A więc za przebiegającymi przez piaszczystą drogę owieczkami długo unosi się tuman kurzu, podczas gdy piach wzbity przez nie w powietrze opada niemal natychmiast. (Zwróćmy też uwagę, że na filmach nakręconych na Księżycu widać, jak pył wzbity przez poruszających się kosmonautów opadał szybko – ale to już inne Laboratorium.)

Gloria

Powszechnie znane zjawiska optyczne powstające w atmosferze (np. tęczę, halo i wieńce) można zaobserwować niezależnie od ukształtowania terenu. W górach natomiast możemy być świadkami wyjątkowego efektu zwanego widmem Brockenu lub glorią. Powstaje ono wtedy, gdy Słońce oświetla chmurę lub mgłę znajdującą się poniżej nas, tak że pada na nią nasz cień. Najdogodniejsze po temu warunki istnieją, kiedy stoimy na grani lub szczycie, a wiatr utrzymuje mgłę po nieoświetlonej stronie grzbietu. Każdy obserwator widzi wokół cienia swojej głowy tęczowy okrąg. W dobrych warunkach wszystkie barwy widma występują dwu- lub trzykrotnie. Cień całej postaci jest zwykle zniekształcony przez perspektywę. (W Internecie można łatwo znaleźć liczne efektowne zdjęcia glorii.)



Zjawisko to nie jest tak elementarne jak pozostałe efekty opisane w obu częściach tego artykułu, jednak robi tak duże wrażenie, że warto o nim wspomnieć i warto poszukiwać sytuacji, w których może powstać. Jego fizyczne wytłumaczenie do dziś nastręcza trudności badaczom zjawisk optycznych w atmosferze. Gloria występuje, gdy krople są bardzo małe, takie jak te, z których utworzone są chmury, tj. o średnicy mniejszej niż około 20 µm. Uważa się, że w powstaniu glorii zasadniczą rolę odgrywa zjawisko propagacji tzw. fal powierzchniowych. Fale świetlne, które padają stycznie na kroplę wody, po załamaniu wchodzą do niej, odbijają się raz, a następnie jako fale powierzchniowe ślizgają się po powierzchni kropli, zanim wyjdą na zewnątrz. Rysunek pokazuje przykład dwóch promieni, wzdłuż których takie fale padają na dwa końce pewnej średnicy kropli. Różnią się one długością łukowatych odcinków przebytych po powierzchni kropli. Po wyjściu fale te biegną w jednym kierunku i interferują. (Wszystkie fale opuszczające w ten sposób kroplę i podążające w różnych kierunkach tworzą front falowy w kształcie wycinka torusa.) Wynik wspomnianej interferencji zależy od różnicy faz, a ta z kolei od kąta między kierunkami promieni padających i wychodzących. Przy pewnych wartościach tego kąta następuje wzmocnienie fali o danej długości. Dzięki symetrii kropel wzmocnione światło o barwie odpowiadającej tej fali dociera do obserwatora od miejsc położonych wzdłuż kierunków tworzących stożka o wierzchołku w jego oku i osi równoległej do promieni padających od Słońca. Dlatego tam właśnie widzimy barwny pierścień. Pierścienie są wyraźne, jeśli krople mają mało zróżnicowane rozmiary. W przypadku najmniejszych kropli wewnętrzna średnica kątowa glorii może wynosić około 5°, a zewnętrzna sięga około 20°. Duże krople wytwarzają mniejszą glorię.