Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2008

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
545 ($WT = 1{,}80$) i **546** ($WT = 2{,}24$)
z numeru 9/2007

Andrzej Jóźwik	– Warszawa	46,71
Paweł Najman	– Jaworzno	45,93
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	43,55
Paweł Kubit	– Kraków	41,03
Grzegorz Karpowicz	– Wrocław	39,78
Krzysztof Dorobisz	– Kraków	36,44
Wojciech Maciak	– Warszawa	35,69
Tomasz Tkocz	– Rybnik	35,31

Witamy: Andrzej Jóźwik – nowa twarz (nr 107) w Klubie 44M; Paweł Najman – trzydziesty Weteran (!).

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 561, 562

Redaguje Marcin E. KUCZMA

561. Ciąg nieskończony $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorem rekurencyjnym

$$4a_{n+1} = (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 1 \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,;$$

wyraz początkowy a_0 jest dowolną liczbą z przedziału $(-1;1)$. Wykazać, że szereg nieskończony $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. Czy jego suma jest liczbą wymierną? (odpowiedź może zależeć od a_0).

562. Punkt D leży na boku BC trójkąta ABC, w którym $|AB| = |AC|$. Punkt F leży na okręgu opisanym na trójkącie ACD, wewnątrz trójkąta ABC. Okrąg przechodzący przez punkty B, D, F przecina bok AB w punkcie E. Dowieść, że

$$|CD| \cdot |EF| + |DF| \cdot |AE| = |BD| \cdot |AF|.$$

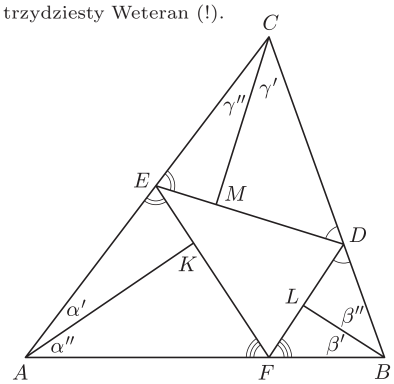
Zadanie 562 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/2008

Przypominamy treść zadań:

553. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb wymiernych x, y, z, dla których każda z liczb $x + \frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{z}$, $z + \frac{1}{x}$ jest całkowita.

554. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB i spełniają warunki $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle EDC|$, $|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle FEA|$, $|\sphericalangle EFA| = |\sphericalangle DFB|$. Dowieść, że proste zawierające wysokości trójkątów AEF, BFD, CDE, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków A, B, C, przecinają się w jednym punkcie.



553. Niech (x, y, z) będzie jedną z szukanych trójek. Liczby

$$a = x + \frac{1}{y}, \quad b = y + \frac{1}{z}, \quad c = z + \frac{1}{x}$$

są naturalne. Ich iloczyn wynosi

$$abc = xyz + \left(x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{xyz}.$$

Suma w nawiasie jest równa $a + b + c$. Oznaczając $X = xyz$, $A = abc - (a + b + c)$, dostajemy zależność $X + X^{-1} = A$, czyli $X^2 - AX + 1 = 0$. Liczba X jest więc pierwiastkiem wymiernym trójmianu kwadratowego $t^2 - At + 1$, którego wyróżnik $\Delta = A^2 - 4$ (liczba naturalna) musi być kwadratem liczby wymiernej – zatem także kwadratem liczby naturalnej. Stąd $A = 2$, czyli $X = 1$. Uzyskana równość $xyz = 1$ pozwala zapisać liczby wymierne x, y, z w postaci ilorazów liczb naturalnych

$$x = \frac{k}{l}, \quad y = \frac{l}{m}, \quad z = \frac{m}{k}.$$

Wzory określające liczby naturalne a, b, c prowadzą do układu równości $al = m + k$, $bm = k + l$, $ck = l + m$.

Niech $s = k + l + m$. Dostajemy związki

$$l = \frac{s}{a+1}, \quad m = \frac{s}{b+1}, \quad k = \frac{s}{c+1},$$

które po dodaniu stronami oraz skróceniu przez s dają przedstawienie liczby 1 w postaci sumy ułamków egipskich

$$1 = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}.$$

Ich mianowniki $(a+1,\ b+1,\ c+1)$ muszą tworzyć jedną z trójek $(3,3,3)$, $(2,4,4)$, $(2,3,6)$, $(3,2,6)$ lub permutację cykliczną takiej trójki. Stąd

$$(x, y, z) = \left(\frac{k}{l}, \frac{l}{m}, \frac{m}{k}\right) = \left(\frac{a+1}{c+1}, \frac{b+1}{a+1}, \frac{c+1}{b+1}\right)$$

jest (odpowiednio) jedną z trójek

$$(1,\ 1,\ 1) \text{ lub } \left(\frac{1}{2},\ 2,\ 1\right) \text{ lub } \left(\frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ 2\right) \text{ lub } \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ 3\right)$$

– lub permutacją cykliczną jednej z tych trójek. Każda z nich spełnia postawione warunki.

554. Z podanych założeń wynika, że trójkąty AEF, BFD, CDE są ostrokątne (rysunek). Zatem spodki K, L, M ich wysokości AK, BL, CM są punktami leżącymi na odcinkach EF, FD, DE (nie na ich przedłużeniach). Oznaczmy:

$$|\sphericalangle EAK| = \alpha', \quad |\sphericalangle FBL| = \beta', \quad |\sphericalangle DCM| = \gamma',$$
$$|\sphericalangle KAF| = \alpha'', \quad |\sphericalangle LBD| = \beta'', \quad |\sphericalangle MCE| = \gamma''.$$

Aby dowieść, że proste AK, BL, CM przecinają się w jednym punkcie, wystarczy wykazać, że

$$\sin\alpha' \cdot \sin\beta' \cdot \sin\gamma' = \sin\alpha'' \cdot \sin\beta'' \cdot \sin\gamma''$$

(twierdzenie Cevy w wersji trygonometrycznej).

Trójkąty prostokątne DLB i DMC mają z założenia równe kąty ostre przy wierzchołku D, więc także ich pozostałe kąty ostre są równe: $\beta'' = \gamma'$, i analogicznie $\gamma'' = \alpha'$, $\alpha'' = \beta'$; wymagana równość zachodzi w sposób oczywisty.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2008

Zadania z fizyki nr 458, 459

Redaguje Jerzy B. BROJAN

458. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji $B = 0{,}208\,\mathrm{T}$ biegną elektrony po linii śrubowej (helisie). Rzut helisy na płaszczyznę prostopadłą do pola jest okręgiem o promieniu $r = 0{,}755\,\mathrm{mm}$, a częstotliwość krążenia po tym okręgu wynosi $f = 5{,}77\,\mathrm{GHz}$. Ile wynosi skok helisy? Jaka jest dokładność wyniku, jeśli każda z podanych wielkości jest znana z dokładnością do jedności w ostatniej podanej cyfrze? Masę i ładunek elektronu wziąć z tablic.

459. Nad cieczą dielektryczną na wysokości H umieszczono ładunek punktowy, a w wyniku tego poziom cieczy pod ładunkiem podniósł się na wysokość h (przy czym $h \ll H$). Na jaką wysokość podniesie się poziom cieczy, gdy podwoimy H? Rozmiary naczynia są duże, tak że z dala od ładunku poziom cieczy pozostaje stały. Można przyjąć założenie upraszczające: pole nad cieczą jest takie, jakby wszędzie wokół ładunku było tylko powietrze, a pole w cieczy – takie, jakby cała przestrzeń była nią wypełniona.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
444 ($WT = 1{,}83$) i **445** ($WT = 2{,}01$)
z numeru 10/2007

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	46,74
Konrad Kapcia	– Częstochowa	41,36
Jerzy Witkowski	– Radlin	34,65
Radosław Poleski	– Kołobrzeg	20,97

Osiem razy niech zagrzmią fanfary na cześć Pana Andrzeja Idzika – bo po raz ósmy przekroczył 44 punkty! Najgorętsze gratulacje!

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2008

Przypominamy treść zadań:

450. Jednorodny cienki pręt postawiono pionowo na poziomej powierzchni i puszczono, w wyniku czego się przewrócił. Jeśli dolny koniec pręta się przy tym nie poślizgnął, to czy nastąpiło oderwanie się tego końca od podłoża przed uderzeniem o podłoże innych części pręta?

Jaka będzie odpowiedź, jeśli podobne doświadczenie przeprowadzić z prętem niejednorodnym – zwężającym się z dołu do góry, albo odwrotnie? (Istotna jest, oczywiście, nie tyle sama grubość, ile masa na jednostkę długości.)

451. Transformator doskonały (tzn. bez strat energii i bez rozproszenia pola magnetycznego) składa się z dwóch uzwojeń o indukcyjnościach L_1 i L_2. Obliczyć częstotliwość drgań własnych tego transformatora, jeśli do pierwszego uzwojenia dołączono kondensator o pojemności C_1, a do drugiego – kondensator o pojemności C_2.

450. Wprowadźmy oznaczenia: α – kąt odchylenia pręta od pionu, $\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ – prędkość kątowa, $\varepsilon = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ – przyspieszenie kątowe, m – masa pręta, l – odległość dolnego końca od środka masy, oraz k – współczynnik we wzorze na moment bezwładności pręta względem dolnego końca

$$I = kml^2.$$

Ruchem pręta rządzi II zasada dynamiki

$$M = mgl\sin\alpha = I\varepsilon, \qquad \text{albo} \qquad g\sin\alpha = kl\varepsilon$$

równoważna zasadzie zachowania energii

$$g(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}kl\omega^2.$$

Działającą na pręt siłę reakcji podłoża R wyznaczymy z równania

$$mg - R = ma_y,$$

gdzie a_y jest pionową składową przyspieszenia (ze zwrotem w dół), czyli drugą pochodną względem czasu współrzędnej $y = l(1-\cos\alpha)$. Wynikiem różniczkowania jest

$$a_y = l(\varepsilon\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha),$$

a po podstawieniu ε i ω z równań wypisanych na początku otrzymujemy

$$R = m(g - a_y) = \frac{mg}{k}(k - \sin^2\alpha - 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha).$$

Oderwanie się dolnego końca od podłoża jest równoważne warunkowi $R < 0$. Wyrażenie

$$\sin^2\alpha + 2(1-\cos\alpha)\cos\alpha = (1-\cos\alpha)(1+3\cos\alpha)$$

osiąga maksymalną wartość równą $4/3$ dla $\cos\alpha = 1/3$ (co odpowiada kątowi α równemu $70{,}6^\circ$). Ponieważ dla jednorodnego pręta współczynnik k wynosi akurat $4/3$, więc jest to przypadek graniczny – oderwanie się nastąpi, jeśli k będzie miało wartość choć trochę niższą. Tak jest, gdy dolny koniec pręta jest cieńszy, lub oba końce są cieńsze – np. przy masie na jednostkę długości rosnącej proporcjonalnie do wysokości k wynosi $9/8$, dla pręta zwężającego się od środka liniowo i symetrycznie w górę i w dół $k = 7/6$, a dla masy skupionej w punkcie k osiąga minimalną wartość 1. (Niestety, wyniki długotrwałych i bolesnych doświadczeń autora z igłą stawianą na ostrzu nie były jednoznaczne.)

451. Niech M będzie współczynnikiem indukcji wzajemnej, a I_1 i I_2 – natężeniami prądu w pierwszym i drugim uzwojeniu. Analiza napięć w pierwszym obwodzie prowadzi do równania

$$L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + \frac{Q_1}{C_1} = 0.$$

Równanie to należy zróżniczkować względem czasu, podstawić

$$\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t} = I_1,$$

a następnie założyć sinusoidalną zależność prądów od czasu. Zamiast drugiej pochodnej wystąpi wtedy przemnożenie przez kwadrat częstości ω (z minusem), tzn.

$$L_1I_1\omega^2 + MI_2\omega^2 = I_1/C_1$$

i podobnie dla drugiego obwodu

$$L_2I_2\omega^2 + MI_1\omega^2 = I_2/C_2.$$

Warunkiem istnienia niezerowego rozwiązania tego układu równań jest

$$\left(L_1\omega^2 - \frac{1}{C_1}\right)\left(L_2\omega^2 - \frac{1}{C_2}\right) = M^2\omega^4.$$

Brak rozproszenia pola magnetycznego (jednakowa wartość strumienia przez każdy zwój) oznacza, że M przyjmuje wartość maksymalną, tzn. $M^2 = L_1L_2$. Wtedy szukana częstość ω wyraża się prostym wzorem

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1 + L_2C_2}}.$$