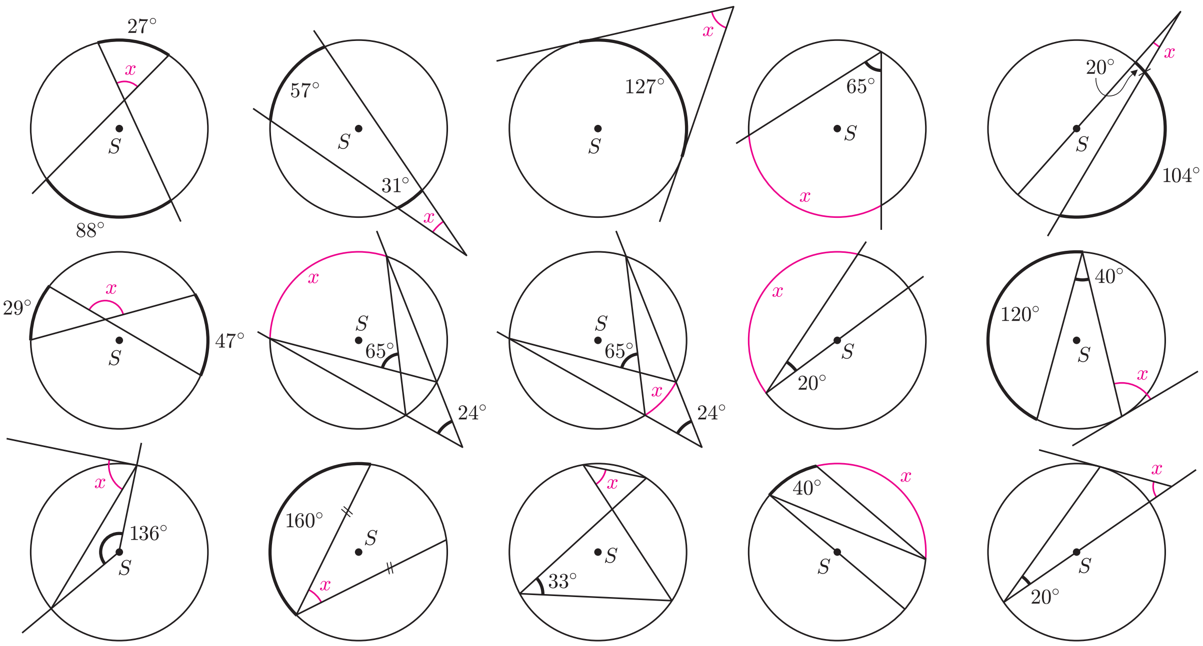
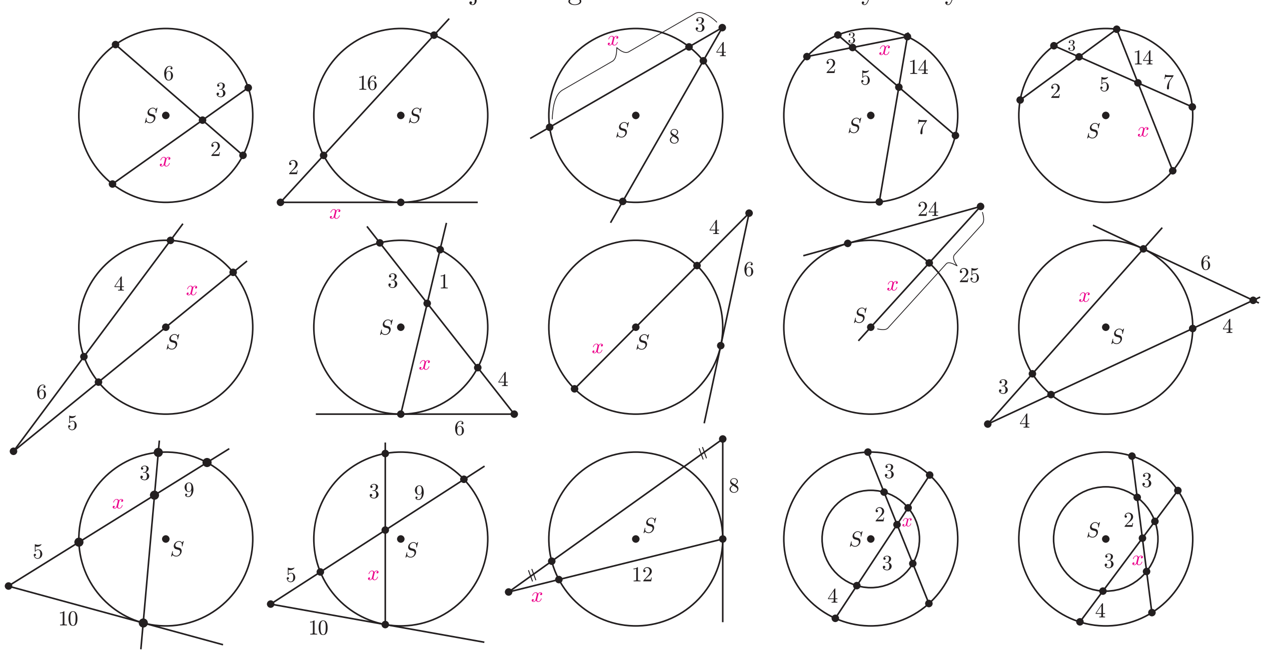
Zadania od mmm*

1. Jaka jest rozwartość kąta x na każdym z rysunków?



Na rysunkach przyjęto konwencję, że miara przypisana łukowi oznacza miarę kąta środkowego opartego na tym łuku.

2. Jaka jest długość odcinka x na każdym z rysunków?

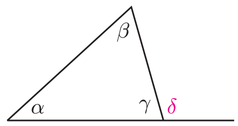


Liczba oznacza długość odcinka między sąsiednimi kropkami.

Spróbuj odpowiedzieć sam, ale w razie czego na następnej stronie znajdziesz wskazówki.

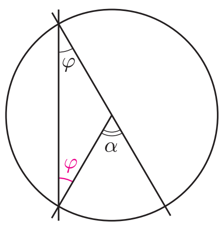
* **mmm** – magazyn miłośników matematyki; `http://www.mmm.uni.wroc.pl`

Wskazówki

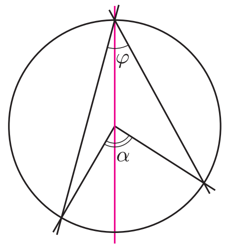


Rys. 1. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=\gamma+\delta$, więc $\alpha+\beta=\delta$.

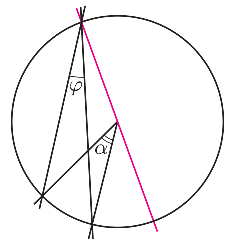
Ponieważ suma kątów w trójkącie to 180°, więc kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Wynika z tego od razu, że w okręgu kąt wpisany (czyli między cięciwami o wspólnym końcu) i kąt dopisany (czyli między cięciwą i styczną w jednym z jej końców) są równe połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku. Dowód pierwszego faktu demonstrują rysunki – na rysunku 2 mamy $2\varphi=\alpha$, w innych przypadkach kąty te dają się przedstawić jako suma (rys. 3) bądź jako różnica (rys. 4) sytuacji z rysunku 2. Do dowodu drugiego potrzeba jeszcze wiedzieć, że kąty o ramionach odpowiednio prostopadłych są równe (rys. 5).



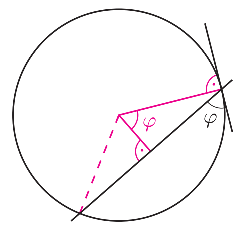
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

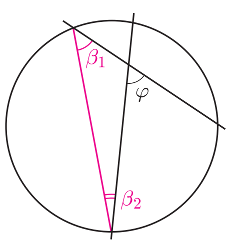


Rys. 5

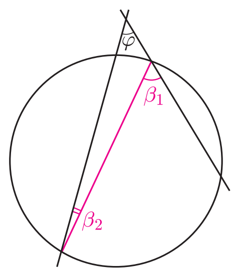
Mniej znany jest fakt, że te zależności są szczególnymi przypadkami twierdzenia

kąt, którego ramiona są zawarte w siecznych lub stycznych do okręgu, jest połową sumy (jeśli wierzchołek kąta jest wewnątrz albo na okręgu) lub różnicy (jeśli jest na zewnątrz) kątów środkowych opartych na łukach, które ten kąt wyznaczają.

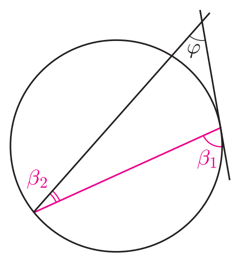
Dowód jest przedstawiony na rysunkach 6, 7, 8 i 9.



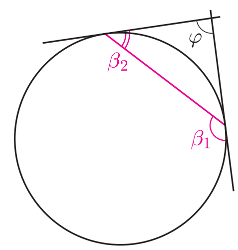
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

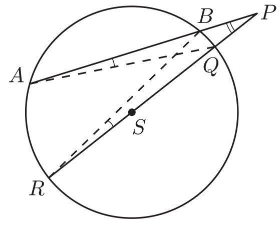
To twierdzenie pozwala rozwiązać bez kłopotu zadanie 1. Aby rozwiązać zadanie 2, wygodnie jest znać twierdzenie

jeśli sieczna przechodząca przez P przecina okrąg o środku S i promieniu r w punktach A i B (może też być $A=B$), to $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=PS^2-r^2$.

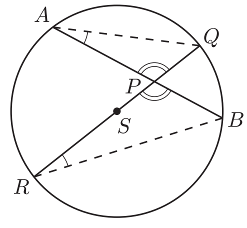
Z tego wynika natychmiast, że dla dowolnych dwóch siecznych (lub stycznych) z P przecinających okrąg w punktach A_1 i B_1 oraz A_2 i B_2 mamy $PA_1\cdot PB_1=PA_2\cdot PB_2$, co pozwala rozwiązać zadanie 2.

Dowód twierdzenia demonstrują rysunki 10, 11 i 12. Na każdym z nich przez P prowadzimy sieczną przez S i mamy z podobieństwa trójkątów PAQ i PRB

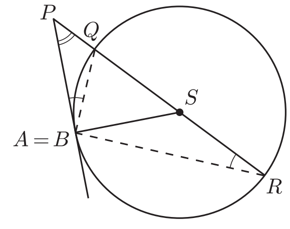
$$\frac{PA}{PQ}=\frac{PR}{PB},\ \text{czyli}\ \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(PS-r)(PS+r)=PS^2-r^2.$$



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Zadania trudniejsze

3. Przez środek C łuku AB, na którym oparty jest kąt ostry wpisany, poprowadzono cięciwy CD i CE przecinające AB w punktach H i F. Wykaż, że na czworokącie $DEFH$ można opisać okrąg.

4. W kąt wpisano dwa okręgi, przy czym A_1 i B_1 są punktami styczności pierwszego okręgu, a A_2 i B_2 – drugiego. Odcinek A_1B_2 przecina te okręgi w punktach C_1 i C_2. Wykaż, że $A_1C_1=A_2C_2$.

Rozwiązania wszystkich zadań można znaleźć na stronie 24.