Wykorzystanie inwersji względem okręgu w dowodzie twierdzenia o $n+2$ okręgach stycznych

Jest to skrót pracy nagrodzonej srebrnym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2007 roku.

Mateusz PLUTA

W swojej pracy podjąłem próbę zbadania pewnych ciekawych własności przekształcenia geometrycznego, jakim jest inwersja względem okręgu, oraz wykorzystania ich w dowodzie tytułowego twierdzenia.

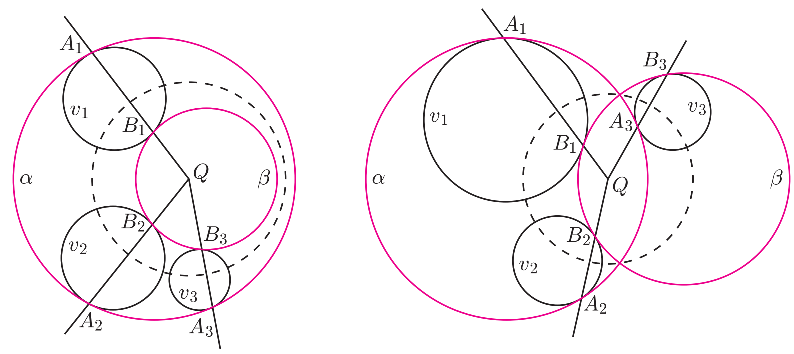
Na początek przypomnienie podstawowych faktów dotyczących inwersji i potęgi punktu względem okręgu.

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r to przekształcenie, które każdemu punktowi $P \neq O$ przyporządkowuje punkt P' leżący na półprostej OP i spełniający warunek $OP \cdot OP' = r^2$. Inwersja jest przekształceniem, które jest odwrotne samo do siebie, przeprowadza przecinające się krzywe na krzywe przecinające się pod tym samym kątem, przeprowadza okręgi przechodzące przez O na proste, a nieprzechodzące przez O na okręgi. Z tego, że inwersja zachowuje kąty, natychmiast wynika, iż okręgi przecinające okrąg inwersyjny pod kątem prostym (*ortogonalne* do niego) przechodzą w inwersji same na siebie. Wobec tego okrąg o średnicy PP' jest ortogonalny do okręgu inwersyjnego. Ponadto każdy z punktów przecięcia dwóch okręgów ortogonalnych do okręgu inwersyjnego jest obrazem inwersyjnym drugiego, co pozwala wyrazić definicje inwersji jedynie za pomocą pojęcia ortogonalności.

Potęga punktu P względem okręgu o środku O i promieniu r to liczba $OP^2 - r^2$ (jest o tym mowa także na stronie 12 – warto zajrzeć) – jest ona zatem dodatnia dla punktów leżących poza kołem ograniczonym tym okręgiem i ujemna wewnątrz. Gdy jest dodatnia, jest kwadratem długości odcinka stycznej z punktu P do punktu styczności do okręgu. Wynika stąd od razu konstrukcja okręgu ortogonalnego do okręgu inwersyjnego, mającego środek na zewnątrz – jego promień to pierwiastek potęgi jego środka. Ważną własnością potęgi jest fakt, że zbiór punktów mających jednakową potęgę względem dwóch niekoncentrycznych okręgów α i β jest prostą (*prosta potęgowa* – oznaczam ją $\updownarrow^{\beta}_{\alpha}$). Każdy punkt tej prostej leżący na zewnątrz tych okręgów jest wobec tego środkiem okręgu ortogonalnego do obu z nich. Dla trzech okręgów o niewspółliniowych środkach proste potęgowe każdej z par przecinają się w jednym punkcie (*środek potęgowy*) – gdy leży on na zewnątrz okręgów, jest środkiem (jedynego) okręgu ortogonalnego do wszystkich trzech.

Udowodnijmy najpierw

Lemat o $3+2$ okręgach stycznych. *Niech α i β będą ustalonymi okręgami o nierozłącznych wnętrzach. Niech v_1, v_2, v_3 będą okręgami stycznymi do jednego z danych okręgów zewnętrznie, a do drugiego wewnętrznie. Niech A_i oraz B_i (dla $i = 1, 2, 3$) będą punktami styczności v_i odpowiednio do okręgów α i β. Wtedy proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 oraz $\updownarrow^{v_1}_{v_2}$, $\updownarrow^{v_2}_{v_3}$, $\updownarrow^{v_3}_{v_1}$ przecinają się w jednym punkcie* (rysunek 1 przedstawia dwie takie sytuacje).



Rys. 1

Rozwiązanie zadania F 713.
Ciśnienie w pierwszym baloniku jest równe $p_1 = \alpha/R_1$, a w drugim $p_2 = p_1 + \alpha/R_2$. Po pęknięciu drugiego balonika ciśnienie będzie równe $p = \alpha/R$. Z prawa Boyle'a–Mariotte'a mamy, że

$$p_1V_1 + p_2V_2 = pV,$$

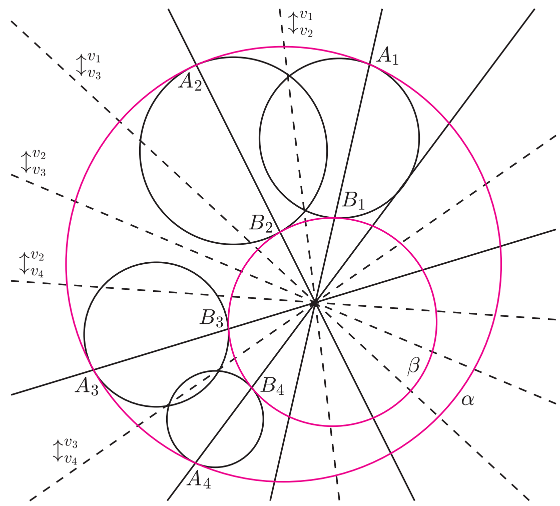
gdzie $V_1 = 4\pi(R_1^3 - R_2^3)/3$, $V_2 = 4\pi R_2^3/3$, $V = 4\pi R^3/3$. Stąd otrzymujemy

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}.$$

Okręgi v_1, v_2, v_3 zostały tak zdefiniowane, że ich środek potęgowy (oznaczmy go przez Q) leży na zewnątrz każdego z nich. Wobec tego istnieje okrąg ortogonalny jednocześnie do okręgów v_1, v_2 oraz v_3, nazwijmy go $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$. Jak będzie wyglądał ten układ $3+2$ okręgów stycznych w inwersji względem $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$? Ponieważ okrąg $\phi_{\perp v_1 v_2 v_3}$ jest ortogonalny do okręgów v_1, v_2 oraz v_3, więc te ostatnie przejdą same na siebie. Okrąg α przejdzie na okrąg styczny do obrazów okręgów v_1, v_2, v_3, czyli na okrąg styczny do v_1, v_2, v_3, lecz wewnętrzna styczność zmieni się na zewnętrzną i odwrotnie. Taki okrąg jest tylko jeden i jest nim okrąg β. Zatem okręgi α i β są obrazami odpowiednio okręgów β i α w tej inwersji. Stąd wynika, że punkty A_i oraz B_i są obrazami odpowiednio punktów B_i oraz A_i. Co za tym idzie, proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 przejdą w tej inwersji na proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Skąd już wniosek, iż wszystkie one muszą przechodzić przez środek okręgu inwersyjnego. A przecież jest to punkt wspólny prostych $\updownarrow^{\upsilon_1}_{\upsilon_2}$, $\updownarrow^{\upsilon_2}_{\upsilon_3}$, $\updownarrow^{\upsilon_3}_{\upsilon_1}$, jako że jest to środek okręgu $\phi_{\perp \upsilon_1\upsilon_2\upsilon_3}$, co kończy dowód lematu.

Możemy teraz przejść do tytułowego twierdzenia.

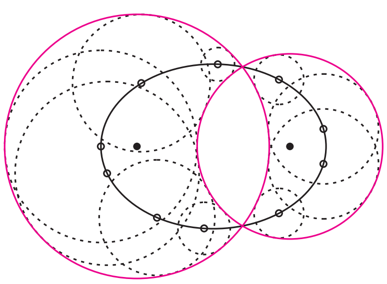
Twierdzenie o $n+2$ okręgach stycznych. *Niech α i β będą ustalonymi okręgami o nierozłącznych wnętrzach. Niech υ_1, υ_2, ..., υ_n będą okręgami stycznymi do jednego z dwóch danych okręgów zewnętrznie, a do drugiego wewnętrznie. Niech A_i oraz B_i będą punktami styczności υ_i odpowiednio do okręgów α i β. Wtedy proste A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n oraz $\updownarrow^{\upsilon_i}_{\upsilon_j}$ dla $i \neq j$ (gdzie $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$) przecinają się w jednym punkcie.*



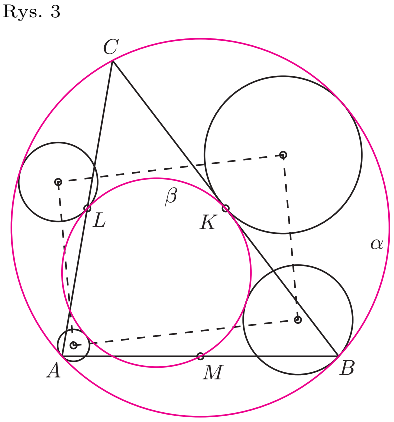
Rys. 2

Na mocy lematu zastosowanego do trójki okręgów υ_1, υ_2 oraz υ_3 wiemy, iż proste A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 i $\updownarrow^{\upsilon_1}_{\upsilon_2}$, $\updownarrow^{\upsilon_2}_{\upsilon_3}$, $\updownarrow^{\upsilon_3}_{\upsilon_1}$ przetną się w jednym punkcie, nazwijmy go Q. Jednakże na mocy tego samego lematu zastosowanego dla okręgów υ_1, υ_2 oraz υ_k (dla dowolnego $k \in \{4, 5, ..., n\}$) wiemy, że proste A_1B_1, A_2B_2, A_kB_k i $\updownarrow^{\upsilon_1}_{\upsilon_2}$, $\updownarrow^{\upsilon_2}_{\upsilon_k}$, $\updownarrow^{\upsilon_k}_{\upsilon_1}$ przetną się w punkcie $Q' = Q$, gdyż proste A_1B_1, A_2B_2 przecinają się w punkcie Q. A to kończy dowód twierdzenia.

Przytoczę teraz kilka innych udowodnionych przeze mnie faktów.



Rys. 3



Rys. 4

Punkt, przez który przechodzą „wszystkie proste” z Twierdzenia o $n+2$ okręgach stycznych, jest środkiem jednokładności wewnętrznej okręgów α i β. Wystarczy skorzystać z definicji inwersji względem okręgu i tak przekształcić wzór, aby uzyskać definicję środka jednokładności wewnętrznej dwóch okręgów.

Środki okręgów z Twierdzenia o $n+2$ okręgach stycznych, które są styczne do okręgów α i β, leżą na jednej elipsie. Ogniskami tej elipsy są środki okręgów α i β, a suma odległości dowolnego jej punktu od ognisk tej elipsy jest równa sumie długości promieni okręgów α i β (rys. 3).

Trzy okręgi: dwa zadane i okrąg, w inwersji względem którego jeden z zadanych okręgów jest obrazem drugiego, mają wspólną oś potęgową oraz wspólną rodzinę okręgów ortogonalnych.

Na koniec – zadanie mojego autorstwa, w rozwiązaniu którego przydają się twierdzenia i własności przytoczone powyżej. Dany jest ostrokątny trójkąt ABC, a punkty K, L oraz M są środkami odpowiednio boków BC, CA oraz AB. Niech α i β będą okręgami opisanymi odpowiednio na trójkątach ABC i KLM. Dowieść, że środki czterech okręgów stycznych równocześnie do α i β – przy czym dwa z nich są styczne w punktach A i B do α, a pozostałe dwa w punktach K i L do β – są wierzchołkami równoległoboku (rys. 4).