Prawo arcusa sinusa

Rafał SZTENCEL

Do n komórek wrzucono n kul. Jaka jest szansa, że dokładnie jedna komórka pozostanie pusta?

Liczbę sprzyjających konfiguracji można obliczyć w czterech krokach: 1) wybieramy dwie kule na $\binom{n}{2}$ sposobów; 2) wrzucamy je do wybranej na n sposobów komórki; 3) z pozostałych komórek wybieramy pustą na $n-1$ sposobów; 4) pozostałe $n-2$ kul umieszczamy w $n-2$ komórkach na $(n-2)!$ sposobów.

Daje to $\binom{n}{2}\cdot n(n-1)(n-2)! = n!\binom{n}{2}$ sposobów, zatem szukane prawdopodobieństwo jest równe

$$\frac{n!\binom{n}{2}}{n^n}.$$

Licznik jest iloczynem tylko dwóch czynników, możliwe więc, że da się go otrzymać w dwóch krokach. Da się: 1) wkładamy po jednej kuli do każdej komórki na $n!$ sposobów; 2) wybieramy dwie kule na $\binom{n}{2}$ sposobów i kulę o mniejszym numerze przekładamy do komórki, gdzie jest kula o numerze większym.

Kolejne zadanie: wykonano dwie serie po n rzutów symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w obu seriach otrzymano tę samą liczbę orłów?

Szansa na k orłów w każdej serii jest równa

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{2^{2n}},$$

więc po zsumowaniu prawdopodobieństw wykluczających się zdarzeń dla $k=0,1,2,\ldots,n$ otrzymujemy (mocno niezadowalającą!) odpowiedź:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{2^{2n}},$$

ponieważ licznik nie jest w zwartej postaci. Zauważmy jednak, że

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{2^{2n}} = \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{2^{2n}} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Istotnie, liczba podzbiorów n-elementowych zbioru $2n$-elementowego, $\binom{2n}{n}$, jest równa $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, jeśli bowiem podzielimy wyjściowy zbiór na dwa n-elementowe podzbiory, to z pierwszego bierzemy k elementów, z drugiego zaś $n-k$, gdzie $0\leqslant k\leqslant n$ (rys.1).

Stąd wniosek, że zadanie można było zrobić prościej: wybrać n rzutów spośród $2n$. Jeśli wybrany rzut należy do pierwszej serii, wynikiem jest orzeł, jeśli do drugiej – reszka.

W tym świetle wyjątkowo frustrujące wydaje się zadanie trzecie: Agnieszka i Bolek grają w tenisa. Są to doświadczeni gracze o równych umiejętnościach, więc zakładamy równe szanse wygrania każdej piłki i niezależność poszczególnych wyników. Rozegrano $2n$ piłek. Jaka jest szansa, że Agnieszka prowadziła przez $2k$ jednostek czasu? Przyjmujemy, że gdy historia rozgrywki wyglądała np. tak: 1:0, 1:1, 1:2, 2:2 (rys. 2), to A i B prowadzili przez 2 jednostki czasu.

Odpowiedź wyraża się prostym wzorem (por. [1], tw. 5.1, roz. III):

$$p_{2k,2n} = \frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}}, \tag{1}$$

jednak – o ile nam wiadomo – nie ma on prostego wyprowadzenia. W [1] potrzebna jest cała strona rachunków i co najmniej jeden nietrywialny pomysł.

Wzór (1) ma nieoczekiwane konsekwencje. Jeśli $n=10$, to w ponad 35% przypadków jeden z graczy będzie prowadził przez cały czas, natomiast na podział prowadzeń 10:10 przypada tylko 6%, tyle samo, co na każdy z wyników: 8:12, 12:8.

Wzór Stirlinga ($n!\sim\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$) daje dla dużych n przybliżenie

$$p_{2k,2n}\sim\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}};$$

dokładniej, gdy $k\to\infty$ i $n-k\to\infty$, iloraz obu stron zmierza do jedności. Wobec tego szansa, że ułamek k/n czasu prowadzenia leży między $\frac{1}{2}$ i t, dana jest wzorem

$$\sum_{n/2<k<tn} p_{2k,2n}\sim\frac{1}{\pi n}\sum_{n/2<k<tn}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}},\qquad t>\frac{1}{2},$$

ale jest to suma Riemanna odpowiadająca całce

$$\int_{1/2}^{t}\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}-\frac{1}{2}.$$

Stąd wynika prawo arcusa sinusa dla procesu Wienera na przedziale $[0,1]$. Proces Wienera jest w pewnym sensie granicą procesów takich, jak gra Agnieszki z Bolkiem. Jeśli przez T oznaczymy czas, jaki trajektoria procesu spędza po stronie dodatniej, to

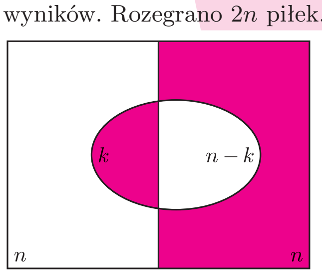
$$P(T\leqslant t) = \int_0^t\frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t},\qquad t\in[0,1]. \tag{2}$$

Stąd nazwa „prawo arcusa sinusa”. Gęstość zmiennej losowej T jest funkcją podcałkową w (2). Zmierza ona do nieskończoności na końcach przedziału $[0,1]$.

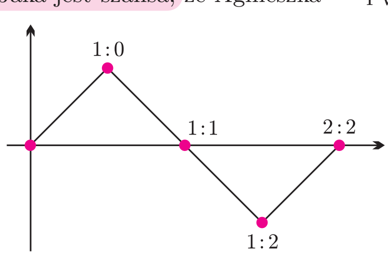
Na rysunku 3 możemy zobaczyć typową – mamy nadzieję – trajektorię procesu Wienera. Tak naprawdę powstała ona w wyniku zapisania ponad 100 tysięcy wyników rzutów monetą, wykonywanych na Festiwalu Nauki w Warszawie przez kilka kolejnych lat. Na współrzędnej y odłożono przewagę orłów nad reszkami. Doświadczenie *Sprawdzamy prawo wielkich liczb* przeprowadzali Wiktor Bartol, Joanna Dębska i Konrad Pióro.

Bibliografia

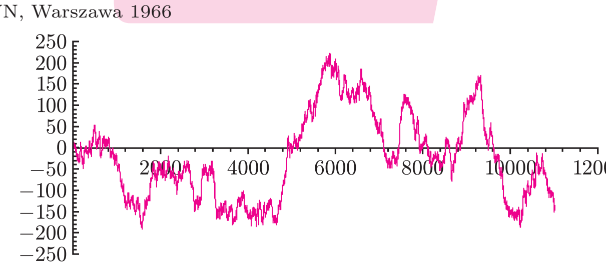
[1] W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I, wyd. II, PWN, Warszawa 1966



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3