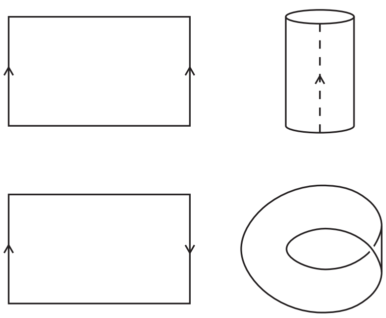
*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

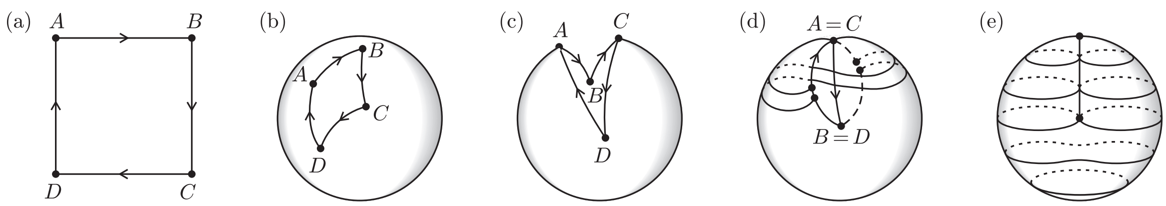
Powierzchnia Boya

*Zdzisław POGODA**

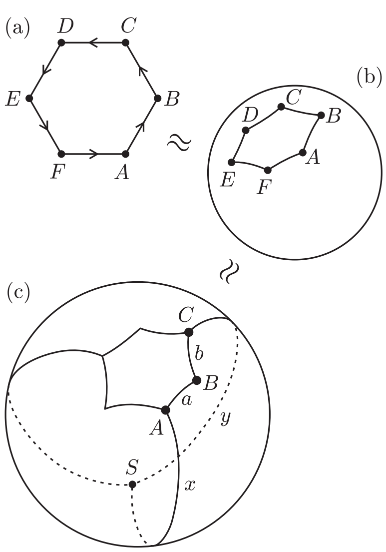


Rys. 1

Sklejanie kojarzy się z zabawą. Tak można robić nie tylko zabawki z papieru lub kartonu, ale także wykonywać modele powierzchni. Operację sklejania, czyli utożsamiania różnych punktów, wykorzystuje się bardzo często w topologii do rozmaitych konstrukcji. Sklejając odpowiednio przeciwległe boki prostokąta, można otrzymać walec (dokładniej powierzchnię boczną walca) albo wstęgę Möbiusa (rys. 1). Oznaczone strzałkami boki sklejamy tak, żeby strzałki się pokrywały. Czyli w drugim przypadku musimy obrócić jedną ze sklejanych krawędzi o 180 stopni, aby strzałki przy sklejaniu miały ten sam zwrot. Gdy utożsamimy w ten sposób pozostałe dwa boki prostokąta, powstanie torus, butelka Kleina, względnie powierzchnia nazwana czapą krzyżową (rys. 2). W ostatnim przypadku opis formalny nie jest trudny, gorzej z intuicją. Nie da się tej powierzchni, podobnie jak butelki Kleina, umieścić w przestrzeni trójwymiarowej bez samoprzecięć. Spróbujmy się przyjrzeć bliżej tej konstrukcji.



Rys. 2

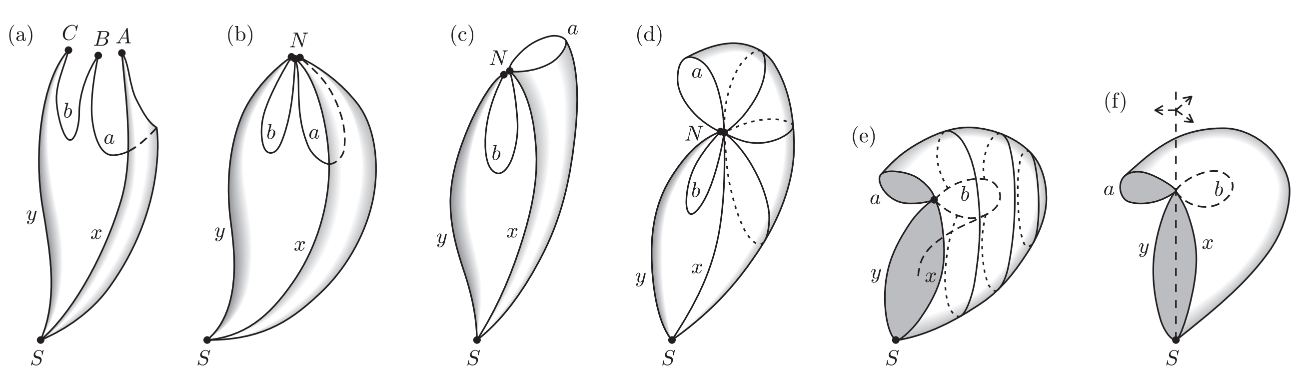


Rys. 3

Jeśli wyobrazimy sobie, że powierzchnia kwadratu zrobiona jest z takiej specjalnej „topologicznej", elastycznej gumy, to, postępując ostrożnie, krok po kroku możemy śledzić proces sklejania. Najpierw deformujemy powierzchnię kwadratu tak, by otrzymać „kwadratową" dziurę w sferze (rys. 2a–c). Następnie sklejamy parę przeciwległych boków AB i CD zgodnie zorientowanych (rys. 2d). Przy sklejaniu drugiej pary boków nie obejdzie się bez przenikania powierzchni właśnie wzdłuż już sklejonych. Opisana konstrukcja (rys. 2e) przedstawia czapę krzyżową (gdyż fragmenty powierzchni się krzyżują), która jest jednym z wielu topologicznych modeli tworu nazywanego płaszczyzną rzutową (będzie ona dokładniej opisana nieco później). Czapa krzyżowa jest obiektem raczej znanym. Rzadziej wspomina się o innym „obliczu" płaszczyzny rzutowej – powierzchni Boya.

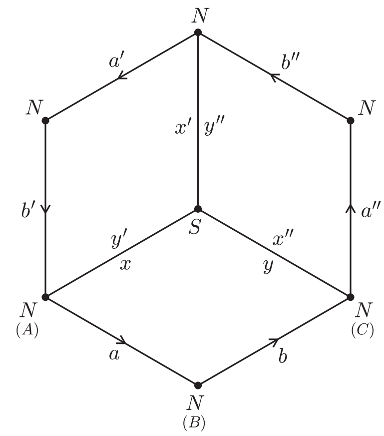
Tym razem sklejać będziemy przeciwległe boki sześciokąta $ABCDEF$ przeciwnie zorientowane (rys. 3a). Rozpoczynamy, podobnie jak poprzednio, od deformacji powierzchni sześciokąta do sfery z sześciokątną dziurą (rys. 3b). Rozkładamy następnie tę dziurawą sferę na trzy przystające części, na brzegu których są dwa sąsiednie boki sześciokąta (rys. 3c). Każdą z części poddamy dalszej obróbce, by później złożyć je w całość. Skoncentrujmy się na jednym fragmencie ograniczonym łukami $SA = x$, $AB = a$, $BC = b$ i $CS = y$. Z pozostałymi kawałkami postąpimy dokładnie tak samo.

„Ciągniemy" najpierw za wyróżnione punkty A, B i C tak, by zeszły się w punkcie N – odpowiedniku bieguna północnego sfery, w której wycięty został sześciokątny otwór (rysunek 4a–b). Wygięty w pętlę bok a obracamy ku górze,



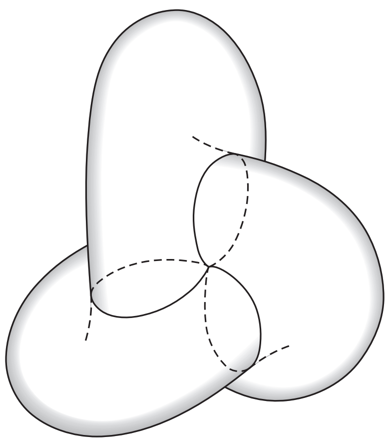
Rys. 4

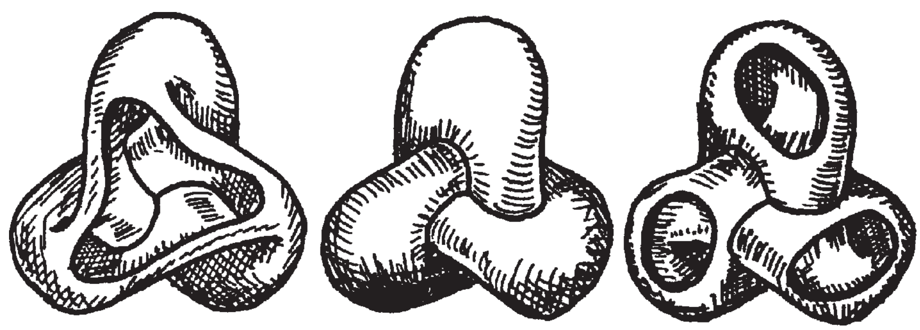
aż do położenia jak na rysunku 4c–e. Zakładamy przy tym, że pozostałe łuki pozostają nieruchome; deformacji ulega jedynie powierzchnia. Następnie obracamy pętlę b na prawo w górę, żeby zajęła miejsce z tyłu powierzchni zgodnie z rysunkiem 4f.



Rys. 5

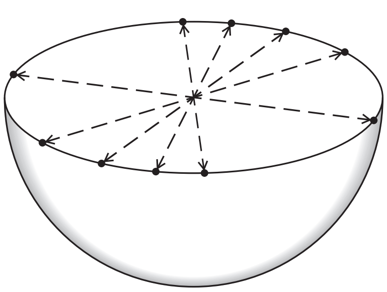
Całą operację wykonujemy tak, żeby łuk x był przystający do łuku y, a pętla a do pętli b. Ponadto po obrocie o kąt $2\pi/3$ wokół osi przechodzącej przez punkty S i N łuk x powinien zająć miejsce łuku y, a pętla b powinna przejść na a. Weźmy teraz drugi egzemplarz tak spreparowanej powierzchni. Oznaczmy jego łuki podobnie, tylko z primami, czyli a', b', x', y'. Przyłóżmy go tak, żeby y' pokryło się z x, a więc konsekwentnie a' nałoży się na b. Trudno to przejrzyście narysować, ale można obejrzeć na sześciokątnym schemacie (rys. 5), gdzie każdy z rombów reprezentuje odpowiednią część deformowaną zgodnie z powyższym opisem (oznaczenia literowe boków wskazują na zależności z łukami). Aby otrzymać powierzchnię Boya, trzeba jeszcze dokleić trzeci przystający fragment. Ze schematu widać, że teraz y sklei się z x'', pętla a z b'', b' z a'' i wreszcie x' z y''. Powierzchnia Boya przenika się wzdłuż trzech pętli schodzących się w punkcie N. Jak wynika z konstrukcji, ma ona trzykrotną oś obrotu (to znaczy, że obracając ją o kąt $2\pi/3$ lub jego wielokrotność, dostaniemy znów to samo). Jest bardziej skomplikowanym obrazem płaszczyzny rzutowej w naszej przestrzeni. W przeciwieństwie jednak do czapy krzyżowej, która ma dwa punkty osobliwe – końce odcinka, wzdłuż którego się przenika – powierzchnia Boya nie ma takich kłopotliwych punktów. Po raz pierwszy została opisana przez Wernera Boya w 1903 roku w związku z badaniami autora nad reprezentacją płaszczyzny rzutowej w przestrzeni trójwymiarowej bez punktów osobliwych.


Rys. 6


Rys. 7

Czytelnik, który dotychczas nie zetknął się z płaszczyzną rzutową, zapewne zdziwi się, że tak powykręcany twór, jak powierzchnia Boya, jest modelem czegoś, co nosi miano płaszczyzny. Już malarze Odrodzenia zauważyli, że pewne proste równoległe na płaszczyźnie postrzegamy jako zbiegające się na horyzoncie. Można się zatem umówić, że do zwykłej płaszczyzny dołączamy dodatkowe punkty, „horyzont”, w których będą się przecinały proste równoległe wyznaczające jeden kierunek. Do każdej prostej dokładamy po jednym punkcie nazywanym punktem w nieskończoności albo punktem niewłaściwym.

Wyobraźmy sobie, że stoimy na ogromnej równinie. Gdy obracamy się, cały czas widzimy linię horyzontu; proste równoległe (tory kolejowe lub brzegi prostej drogi) naturalnie zbiegają się na horyzoncie. Jeśli obrócimy się do tyłu, to te same proste równoległe znów będą się schodziły, tym razem po przeciwnej stronie. Nie jest dobrze, aby różne proste miały więcej niż jeden punkt przecięcia, dlatego umówiono się, że punkt na horyzoncie i jego przeciwległy odpowiednik to ten sam punkt. Można więc sobie wyobrazić, że płaszczyzna rzutowa powstaje z koła przez utożsamienie przeciwległych punktów brzegu albo, co na jedno wychodzi, przez sklejenie przeciwległych punktów brzegu półsfery (rys. 8). Czy będziemy sklejać pracowicie punkt po punkcie, czy – jak w przypadku czapy krzyżowej i powierzchni Boya – odcinki, powstaje ten sam twór, tylko za każdym razem inaczej przedstawiony w naszej przestrzeni. Można to porównać do sytuacji, gdy obserwujemy różne cienie skomplikowanej powierzchni obracanej w przestrzeni. A płaszczyzna rzutowa ma jeszcze inne niezwykłe reprezentacje...


Rys. 8