Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 VI 2008

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.

Zadania z matematyki nr 559, 560

Redaguje Marcin E. KUCZMA

559. Na wolnych polach kwadratowej planszy o rozmiarach $n \times n$ dwaj gracze na przemian stawiają pionki (nierozróżnialne). Wygrywa gracz, po którego ruchu znajdą się cztery pionki na dowolnych czterech polach, będących narożnikami prostokąta o bokach równoległych do krawędzi planszy. Rozstrzygnąć (w zależności od n), który z graczy ma strategię zwycięską – rozpoczynający czy jego przeciwnik.

560. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste m, dla których nierówność $(\sin x)^m \operatorname{tg} x > x^{m+1}$ jest spełniona dla $x \in (0; \pi/2)$.

Zadanie 560 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2007

Przypominamy treść zadań:

551. W zespole folklorystycznym jest n chłopców i $2n-1$ dziewcząt. Zostały im przydzielone odpowiednio numery od 1 do n oraz od 1 do $2n-1$. W przygotowaniach do programu, w którym ma wystąpić r par, tancerz o numerze i trenował tylko z tancerkami o numerach od i do $2i-1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ile jest możliwości zestawienia tych r par tak, by w każdej parze znalazły się osoby mające za sobą wspólny trening?

552. Niech $a_n \geqslant 1$ oraz $b_n = \sqrt{a_n + \sqrt{a_n}} - \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Wykazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

551. Oznaczmy liczbę możliwych zestawień przez $F(n,r)$. Wyprowadzimy zależność rekurencyjną. Gdy $r = 0$ (występ z udziałem 0 par), przygotowanie do występu jest „pracą pustą”, którą można wykonać tylko w jeden sposób. Gdy $r > 0$, ale $n = 0$, to mamy zero możliwości zestawienia r par. Stąd wartości brzegowe:

$$F(n,0) = 1 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$F(0,r) = 0 \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, 3, \ldots .$$

Ustalmy $n, r > 0$. Tancerzowi o numerze n dajmy na imię Jasiek.

Jakby Jasiek chciał tańcować
tobym z Jaśkiem tańcowała – ?
(Stanisław Wyspiański, *Wesele*)

Możemy ustawić r par, nie zapraszając Jaśka w ogóle; to się da zrobić na $F(n-1,r)$ sposobów. Teraz liczymy ustawienia, gdzie Jasiek wchodzi do jednej z par. Najpierw zestawiamy $r-1$ par, w których wystąpią pozostali chłopcy (o numerach od 1 do $n-1$); te pary możemy zestawić na $F(n-1,r-1)$ sposobów. Zostaje $(2n-1)-(r-1) = 2n-r$ wolnych tancerek, z których każda może być partnerką Jaśka. Dostajemy wzór

$$F(n,r) = F(n-1,r) + (2n-r)F(n-1,r-1)$$

(rozumowanie działa także w przypadku, gdy któraś z liczb $n-1$, $r-1$ jest zerem).

Wyprowadzony wzór rekurencyjny oraz warunki brzegowe wyznaczają wszystkie wartości $F(n,r)$. Obliczając te wartości dla niewielkich n, r wnet zauważymy, że uzyskiwane liczby $F(n,r)$ dzielą się przez $r!$. Wypisując następnie tabelkę wartości $F(n,r)/r!$, rozpoznajemy w jej elementach kwadraty liczb z trójkąta Pascala.

To sugeruje wynik:

$$F(n,r) = (r!)\binom{n}{r}^2,$$

gdzie jak zwykle $\binom{n}{r} = 0$ dla $r > n$. Aby uzasadnić, że istotnie jest to prawidłowy wynik, wystarczy sprawdzić, że odgadnięte liczby $F(n,r)$ spełniają uzyskane wcześniej warunki brzegowe oraz wzór rekurencyjny. Nietrudne sprawdzenie zostawiamy Czytelnikowi.

552. Z równości

$$b_n = \frac{2\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n+\sqrt{a_n}}+\sqrt{a_n-\sqrt{a_n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+a_n^{-1/2}}+\sqrt{1-a_n^{-1/2}}}$$

widać, że jeśli $a_n \to \infty$, to $b_n \to 1$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej podnosimy równość

$$b_n + \sqrt{a_n - \sqrt{a_n}} = \sqrt{a_n + \sqrt{a_n}}$$

stronami do kwadratu. Po redukcji dostajemy kolejną równość

$$2b_n\sqrt{a_n-\sqrt{a_n}} = 2\sqrt{a_n} - b_n^2,$$

którą także podnosimy do kwadratu, otrzymując po przekształceniu zależność

$$4a_n\left(b_n^2-1\right) = b_n^4.$$

Wynika z niej, że $b_n^2 > 1$ oraz

$$a_n = \frac{b_n^4}{4(b_n^2-1)}.$$

Jeśli więc $b_n \to 1$, to $a_n \to \infty$.

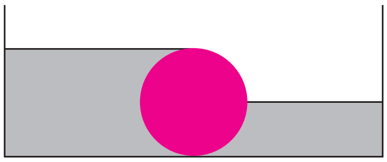
Klub 44

Zadania z fizyki nr 456, 457

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2008

456. W płaskim naczyniu położono walec i nalano cieczy z jednej jego strony do wysokości równej średnicy walca, a innej cieczy nalano z drugiej strony do wysokości równej promieniowi walca (rysunek). Przepływ cieczy wokół podstaw walca jest uniemożliwiony barierami, które nie przeszkadzają walcowi toczyć się w lewo lub w prawo. Jeśli gęstość walca jest równa ρ, w opisanej sytuacji pozostaje on w równowadze, a jego nacisk na dno naczynia jest równy połowie jego ciężaru, to ile wynosi gęstość cieczy z lewej strony walca, a ile – z prawej?



457. Pan Nowak wybiera się samochodem na urlop na południe i namawia do tego samego znajomych. Ma w tym pewien interes – oczekuje pewnego wydłużenia doby, a więc wydłużenia wakacji (przy niezmienionej cenie noclegów!). Udało mu się zebrać grupę 20 rodzin, którym skutecznie przedstawił przewagę Grecji nad Norwegią jako miejsca letniego wypoczynku. O ile wydłuży się doba wskutek tej wyprawy?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2007

Przypominamy treść zadań:

448. Przepływ ciepła od wewnętrznej do zewnętrznej szyby okiennej wynika głównie z konwekcji powietrza (lub innego gazu) w obszarze między szybami. Ktoś zaproponował, żeby podzielić ten obszar poziomymi przegrodami na mniejsze komórki, ograniczając w ten sposób konwekcję, czyli polepszając izolację cieplną. Ktoś inny uważa, że skutek będzie odwrotny, gdyż skróci się droga przejścia gazu od kontaktu z jedną szybą do kontaktu z drugą. Który z dyskutantów ma rację? Pominąć przepływ ciepła przez przegrody.
Dopuszczalne jest oparcie odpowiedzi na przeprowadzonym doświadczeniu.

449. Dwa statki kosmiczne o jednakowej masie m zbliżają się do siebie z względną prędkością $2v_0$. Gdy ich odległość wynosiła l_0, jeden ze statków wysłał w stronę drugiego impuls laserowy o energii E_0, który odbił się od zwierciadła na drugim statku, następnie od zwierciadła na pierwszym itd., przy czym w każdym kolejnym odbiciu całość impulsu została odbita w opisany sposób. Ile będzie wynosiła minimalna odległość zbliżenia statków? Jeśli długość fali impulsu początkowego wynosiła λ_0, to ile będzie wynosiła w chwili minimalnego zbliżenia? Pominąć grawitacyjne oddziaływanie statków i przyjąć $v_0 \ll c$, $E_0 \ll mvc$.

448. Przy ustalonych temperaturach szyb ustalona jest też gęstość gazu przy jednej i przy drugiej szybie. Ciśnienie słupa gazu jest proporcjonalne do jego wysokości, zatem różnica ciśnień zimnego i ciepłego gazu jest proporcjonalna do wysokości komórki h. Aby obliczyć siłę napędzającą konwekcję, należy tę różnicę ciśnień pomnożyć przez powierzchnię, którą trudno dokładnie sprecyzować ze względu na zmienność temperatury i gęstości gazu. Z grubsza rzecz biorąc, jest to połowa przekroju poziomego obszaru między szybami, a w każdym razie jest to wielkość niezależna od h. Jeśli przepływ jest laminarny (bez zawirowań), to siła ta jest równoważona przez wynikającą z lepkości siłę tarcia warstw gazu. Ta siła jest proporcjonalna do powierzchni tych warstw, czyli do h, a ponadto zależy od prędkości krążenia i odległości szyb. Ponieważ zależność od h skraca się po obu stronach warunku równowagi, więc dochodzimy do wniosku, że prędkość krążenia będzie jednakowa w komórkach wyższych i niższych. W tej sytuacji argument drugiego dyskutanta jest rozstrzygający: gaz w mniejszej komórce szybciej przejdzie od kontaktu z jedną szybą do kontaktu z drugą, czyli wprowadzenie przegród pogorszy izolację cieplną.

Uważny Czytelnik dostrzeże bez trudu kilka niepewnych punktów powyższego rozumowania, np.
– czy przepływ jest rzeczywiście laminarny?
– czy skrócenie kontaktu gazu z szybą nie spowoduje, że wyrównanie temperatury będzie niepełne, co z kolei może zaowocować zmniejszeniem różnicy ciśnień napędzającej konwekcję?

Sądzimy, że te kwestie nie zmieniają podanej wyżej odpowiedzi, ale z zainteresowaniem czekamy na listy. Może Czytelnicy potraktują powyższe rozwiązanie jako „wypowiedź trzeciego dyskutanta” i nadeślą kolejne wypowiedzi polemiczne? Jakie będą wyniki doświadczeń? Ciekawsze głosy przedstawimy w podsumowaniu rocznym (w numerze lutowym 2009 r.).

449. Oznaczmy prędkość każdego ze statków w układzie ich środka masy jako v. Na podstawie zasady zachowania pędu zmiana prędkości statku podczas odbicia impulsu spełnia równanie

$$m\Delta v = -2p = -2E/c,$$

gdzie p jest pędem impulsu. Pominięcie zmiany wartości p (uwzględnienie tylko zmiany zwrotu) jest uzasadnione na mocy podanych założeń; ponadto z drugiego z nich wynika, że zmiana prędkości jest niewielka w porównaniu z samą prędkością v i powinniśmy brać pod uwagę bardzo dużą liczbę odbić. W ciągu czasu $\mathrm{d}t$ liczba odbić jest równa $c\mathrm{d}t/l$, z czego na każdy ze statków przypada połowa. Zatem zmianę pędu statku w ciągu tego czasu otrzymamy, mnożąc podaną wyżej wielkość $-2E/c$ przez $c\mathrm{d}t/2l$:

$$m\mathrm{d}v = -E\mathrm{d}t/l = E\mathrm{d}l/2lv,$$

gdzie wykorzystany został także związek $\mathrm{d}l = -2v\mathrm{d}t$. Pozostaje jeszcze skorzystać z zasady zachowania energii w celu wyznaczenia zmiany energii impulsu $\mathrm{d}E$

$$mv^2 + E = \mathrm{const}, \quad \text{czyli} \quad \mathrm{d}E = -2mv\mathrm{d}v.$$

Eliminując $\mathrm{d}v$ z powyższych równań, otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}E}{E} + \frac{\mathrm{d}l}{l} = 0.$$

Całkowanie prowadzi do wzoru $El = \mathrm{const} = E_0 l_0$. Ponieważ w chwili zatrzymania $E = mv_0^2$, więc szukana odległość zbliżenia wynosi

$$l_{min} = l_0 \frac{E_0}{mv_0^2}.$$

Liczba kwantów promieniowania nie ulegnie zwiększeniu, a jedynie wzrośnie energia każdego z nich, w stosunku odwrotnym do spadku odległości statków. Z kolei długość fali jest odwrotnie proporcjonalna do energii kwantu, więc zmienia się wprost proporcjonalnie do l. W chwili minimalnego zbliżenia

$$\lambda_{min} = \lambda_0 \frac{E_0}{mv_0^2}.$$