## Informatyczny kącik olimpijski (7) – gra Penneya jeszcze inaczej

Alicja i Bob, jak wszyscy wiemy, lubią nie tylko szyfrować swoją korespondencję – drugą ich pasją jest granie w przeróżne gry. Tym razem chcą zagrać w grę Penney'a, opisaną w *Logomotywach* (*Delta* 2/2008) i chcieliby obliczyć szanse swojego zwycięstwa.

Przypominamy zasady: na początku każdy gracz wybiera pewne słowo zero-jedynkowe – swój *wzorzec* (*wzorzec* Alicji to $A$, a Boba – $B$). Następnie gracze zaczynają rzucać monetą. Kiedy wypada reszka, dopisują na osobnej kartce (do początkowo pustego ciągu) 0, kiedy orzeł – 1. Wygrywa ten z graczy, którego wzorzec pierwszy znajdzie się jako podsłowo w tak losowanym ciągu.

Możemy przyjąć, że żaden ze wzorców nie jest sufiksem drugiego wzorca, żeby uniknąć remisów.

Rzadko kiedy podejście bezpośrednie będzie rozwiązaniem takiego zadania, ale przemyślmy je. Nie możemy przejrzeć wszystkich możliwych losowanych ciągów – jest ich nieskończenie wiele. Ale przyjmijmy, że mamy jeden z nich – czyli wiemy, co kolejno wypadnie – i zobaczmy, jak wyglądałaby gra. W każdym momencie łatwo sprawdzić, czy gra właśnie się kończy – wystarczy sprawdzić, czy któryś ze wzorców właśnie stał się podsłowem (a zatem sufiksem) losowanego ciągu. Zastanówmy się też, czy musimy pamiętać cały losowany ciąg. Skoro wzorce porównujemy tylko z sufiksami ciągu, to wystarczy nam na pewno znać ostatnich $\max(\|A\|, \|B\|)$ znaków ciągu. Znajomość algorytmu Knutha–Morrisa–Pratta wyszukiwania wzorca w tekście może zasugerować następny krok: tak naprawdę nie musimy znać wszystkich tych znaków ciągu, wystarczy nam znajomość dwóch liczb: $k_A$ i $k_B$, będących największymi liczbami spełniającymi:

$$F[\|F\| - k_X + 1, \ldots, \|F\|] = X[1, \ldots, k_X],$$

gdzie $F$ jest losowanym ciągiem, a $X$ to $A$ lub $B$. Oczywiście, $k_A \leqslant \|A\|$ i $k_B \leqslant \|B\|$. Innymi słowy, $k_A$ i $k_B$ są długościami najdłuższych prefiksów $A$ i $B$ będących jednocześnie sufiksami $F$. Te liczby nam mówią, ile ostatnich znaków $F$ „pasuje" do $A$ i $B$. Jeśli nowy znak pasuje do $X$, to $k_X$ rośnie o 1, a jeśli nie – maleje o pewną wartość. Oznaczmy przez $f_X(k_X, \alpha)$ nową wartość $k_X$, gdy następnym znakiem w ciągu będzie $\alpha \in \{0, 1\}$. Wszystkie wartości tej funkcji możemy obliczyć i np. stablicować w czasie $O(\max(\|A\|, \|B\|))$, używając wspomnianego już algorytmu KMP, lub w czasie $O(\max(\|A\|, \|B\|)^2))$ bardziej łopatologicznie, co w zupełności dla naszych zastosowań wystarczy.

Wiedząc trochę więcej, zastanówmy się, jak teraz reprezentować stan gry? Zaczęliśmy od pełnego wylosowanego ciągu, potem chcieliśmy pamiętać tylko jego część, aż w końcu ograniczyliśmy się do dwóch liczb. W takim razie wszystkich stanów w grze będzie $\|A\|\|B\| + 2$ (wszystkie pary $(k_A, k_B)$ plus jeszcze dwa stany – „Alicja wygrała" i „Bob wygrał").

Z każdego stanu $(k_A, k_B)$, poza końcowymi, z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ przejdziemy do każdego ze stanów $(f_A(k_A, \alpha), f_B(k_B, \alpha))$, gdzie $\alpha = 0$ lub 1. Jeśli dojdziemy do stanu z $k_A = \|A\|$ lub $k_B = \|B\|$, to zakończyliśmy grę.

W tym momencie mamy graf, w którym wierzchołkami są stany gry, a krawędziami – możliwe przejścia między nimi, etykietowane prawdopodobieństwami tych przejść. Stajemy więc przed następnym zadaniem – jak w takiej reprezentacji gry obliczyć prawdopodobieństwa wygranej Alicji i Boba, czyli prawdopodobieństwa dojścia ze stanu $(0, 0)$ do stanów końcowych? Odpowiedź byłaby banalnie prosta, gdyby nie było żadnych innych stanów. Możemy jednak usuwać stany pośrednie, które nas nie interesują. Niech $v$ będzie stanem pośrednim, i niech $T_{i,j}$ będzie prawdopodobieństwem tego, że ze stanu $i$ przejdziemy do stanu $j$. Jeśli z $i$ nie ma krawędzi do $j$, to $T_{i,j} = 0$. Jak łatwo zauważyć, po usunięciu stanu $v$ mamy

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + T_{i,v}T_{v,j}(1 + T_{v,v} + T_{v,v}^2 + \ldots) = \\ = T_{i,j} + \frac{T_{i,v}T_{v,j}}{1 - T_{v,v}},$$

dla $i, j \neq v$. Dlaczego? $T_{i,v}T_{v,j}$ jest prawdopodobieństwem tego, że ze stanu $i$ przejdziemy do $v$, a następnie do $j$, zaś $T_{i,v}T_{v,v}^kT_{v,j}$ odpowiada $k$-krotnemu kręceniu się po drodze pętelką w $v$.

W ten sposób, w czasie potrzebnym na przekształcenie $T$ w $T'$, a więc $O(N^2)$, gdzie $N$ jest ilością stanów, możemy usunąć pojedynczy wierzchołek – a więc w czasie $O(N^3)$ zredukujemy graf do trójki wierzchołków. I wtedy już wiemy, kto ma większe szanse wygrać. Na koniec dodajmy, że podane tu rozwiązanie bez kłopotu przenosi się na przypadek alfabetu więcej niż dwuelementowego.

*Filip WOLSKI*

**Rozwiązanie zadania F 714.**
Z warunku równowagi otrzymujemy $p_0 l_1 S = (p_0 + \Delta p) l_2 S = (p_0 - \Delta p) X S$, gdzie $\Delta p$ jest zmianą ciśnienia powietrza wewnątrz probówki podczas jej obrotu. Otrzymujemy zatem

$$X = \frac{l_1 l_2}{2l_2 - l_1}, \quad l_2 < l_1 < 2l_2$$

(jeśli będzie $l_1 \geqslant 2l_2$, rtęć wypadnie).