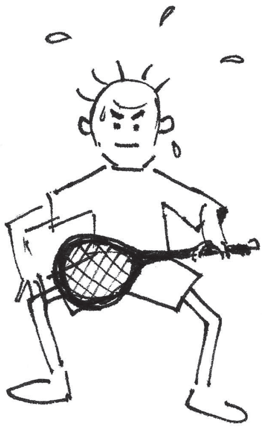
Uczuciowy tenisista

Rafał SZTENCEL



Tenisista ma rozegrać trzy mecze. Gdy wygra dwa kolejne, to awansuje. Ma przy tym wybór, może bowiem grać kolejno z mistrzem, kolegą i mistrzem albo też z kolegą, mistrzem i kolegą. Którą możliwość powinien wybrać?

Zadanie to jest od zawsze obecne w elementarnym rachunku prawdopodobieństwa. Niewykluczone, że w jakiejś wersji rozwiązywali je kandydaci na kapłanów w starożytnym Egipcie, i to już za panowania I dynastii (ok. 3000 p.n.e.). Oczywiście stosowne papirusy musiały zaginąć.

We współczesnych zbiorach zadań pojawia się ono w rozdziale o niezależności zdarzeń, co już sugeruje, jaki model należy przyjąć: wyniki kolejnych meczów mają być niezależne. Naturalnie szansa pokonania mistrza (p) powinna być mniejsza niż szansa pokonania kolegi (r). Proste rachunki pokazują, że wariant MKM daje awans z prawdopodobieństwem

$$prp + pr(1-p) + (1-p)rp = pr(2-p),$$

i tu drobna niespodzianka – choć dwukrotnie gramy z mistrzem, ten wariant jest korzystniejszy, bo gdy $r > p$, to $pr(2-p) > pr(2-r)$.

Czy taki model dobrze opisuje zachowanie się zawodników? Być może podstawą dla lepszego modelu może być następujące zadanie egzaminacyjne[1]:

[1] Ułożone wspólnie z dr. hab. Krzysztofem Oleszkiewiczem, któremu też zawdzięczam tytuł tego artykułu.

Uczuciowy tenisista po wygranej piłce wpada w euforię i wygrywa następną piłkę z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, po przegranej – w depresję, i wtedy wygrywa następną piłkę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Mecz rozpoczyna w stanie euforii. Jaka jest w przybliżeniu szansa, że wygra 99. piłkę?

To zadanie można rozwiązać za pomocą łańcuchów Markowa (można i bez). Model jest nieco lepszy, bo uwzględnia fakt, że stan psychiczny zawodnika, rzutujący na jego skuteczność, zależy od stanu meczu.

Żeby wygrać gema, należy wygrać 4 piłki, zanim zrobi to przeciwnik, a ponadto mieć przewagę 2 lub więcej piłek. Gem nie trwa zbyt długo, choć – zwłaszcza w tenisie amatorskim – zdarza się, że trzeba grać ponad pół godziny.

Przypuśćmy, że zawodnicy grają „na przewagę" i po 30 piłkach żadnemu nie udaje się wygrać. W takiej sytuacji można podejrzewać, że grają oni równie skutecznie i każdy z nich po osiągnięciu przewagi traci czujność, co pozwala wygrać kolejną piłkę przeciwnikowi.

Przeprowadzimy weryfikację statystyczną modelu, o którym była mowa na początku. Prowadzi on do schematu Bernoulliego (niezależnych prób) z prawdopodobieństwem sukcesu równym $\frac{1}{2}$. Wszystkich możliwych ciągów 30 sukcesów (S) i porażek (P) jest 2^{30}, podczas gdy ciągów sprzyjających opisanemu zdarzeniu jest tylko 2^{15}, bowiem muszą one być postaci

$$A_1A_2\ldots A_{15}, \quad \text{gdzie } A_i = SP \text{ lub } A_i = PS.$$

Tak więc przy założeniach modelu szansa, że gra „na przewagę" będzie wymagała co najmniej 30 piłek, jest równa $2^{-15} < 3{,}1 \cdot 10^{-6}$. Model należy zatem odrzucić.

Można zapytać, jaka jest (przy założeniach modelu) średnia długość gry „na przewagę". Rozumowanie przeprowadzone powyżej może zasugerować nastepujący sposób: niech X oznacza długość gry. Wtedy

$$EX = P(X \geqslant 1) + P(X \geqslant 2) + P(X \geqslant 3) + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \ldots = 4.$$

Skąd wynika pierwsza równość? Ograniczymy się do wskazówki: $P(X = k) = P(X \geqslant k) - P(X \geqslant k+1)$.

Istnieje obszerna literatura dotycząca prognozowania wyników rozgrywek tenisowych. Na ogół dostęp do artykułów w sieci jest płatny, czemu nie należy się dziwić. Autorzy (bezpłatnego) artykułu [1] twierdzą, że prosty model oparty na łańcuchach Markowa umożliwił prognozowanie wyników turnieju Australian Open 2003 z pewnością przekraczającą 75%. Model daje prawdopodobieństwo wygranej danego zawodnika w meczu. Jeśli różni się ono od przewidywań bukmacherów, można systematycznie zarabiać na zakładach. Jest to przykład sytuacji, zwanej w finansach arbitrażem: jeśli na rynku pojawia się błędnie wyceniony papier wartościowy, to arbitrażysta dysponujący prawidłową wyceną może na tym zarobić.

Bibliografia

[1] Barnett T., Brown A., Clarke S., *Developing a Model that Reflects Outcomes of Tennis Matches*, www.strategicgames.com.au/8mcs.pdf