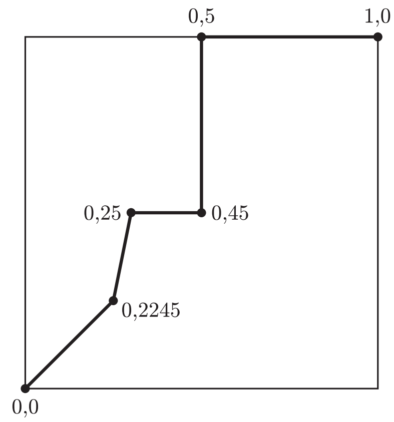
Spacerkiem po kwadracie

Adam KOLANY[*]

Czy można zaprojektować spacer po kwadracie (pełnym) tak, żeby zwiedzić każdy jego punkt dokładnie raz? Innymi słowy, czy istnieje różnowartościowa funkcja z odcinka $\Delta = [0,1]$ na kwadrat $K = [0,1] \times [0,1]$?

Jak dobrze wiemy, z każdą liczbą r z przedziału Δ można skojarzyć nieskończony ciąg liczb całkowitych ze zbioru $\{0,1,2,\ldots,9\}$ – mianowicie jej rozwinięcie dziesiętne. Sugeruje to pewien pomysł na przyporządkowanie punktom przedziału Δ punktów kwadratu. Zdefiniujmy odwzorowanie $\tau : \Delta \to K$ następująco: niech r będzie dowolnym punktem odcinka i niech $\delta(r) = \langle d_n \rangle_{n=1,2,3,\ldots}$ będzie ciągiem cyfr jego nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego zaczynającego się od zera – tak więc $\delta(1) = \langle 9,9,9,9,\ldots\rangle$. Podobnie w przypadku niejednoznaczności (liczby postaci $M/10^k$ mają dwa rozwinięcia dziesiętne) wybieramy rozwinięcie nieskończone – czyli gdy w pewnym momencie trafiamy na k i dalej same zera, piszemy zamiast tego $k-1$ i dalej same dziewiątki. Wówczas jako $\tau(r)$ przyjmujemy punkt, którego współrzędne mają rozwinięcia $\langle d_1, d_3, d_5, \ldots\rangle$ i $\langle d_2, d_4, d_6, \ldots\rangle$, odpowiednio. Tak na przykład:

$$\begin{array}{rcccccl} \tau(0) &=& \tau(0{,}00000\ldots) &=& \langle 0{,}000\ldots;0{,}000\ldots\rangle &=& \langle 0;0\rangle,\\ \tau(1) &=& \tau(0{,}99999\ldots) &=& \langle 0{,}999\ldots;0{,}999\ldots\rangle &=& \langle 1;1\rangle,\\ \tau(0{,}5) &=& \tau(0{,}49999\ldots) &=& \langle 0{,}499\ldots;0{,}999\ldots\rangle &=& \langle 0{,}5;1\rangle,\\ \text{albo } \tau(0{,}25) &=& \tau(0{,}24999\ldots) &=& \langle 0{,}299\ldots;0{,}499\ldots\rangle &=& \langle 0{,}3;0{,}5\rangle. \end{array}$$



Rys. 1

A kiedy będziemy w środku kwadratu?

Mamy

$$\langle 0{,}5;0{,}5\rangle = \langle 0{,}499\ldots;0{,}499\ldots\rangle = \tau(0{,}449999\ldots) = \tau(0{,}45).$$

A kiedy w środku lewej dolnej ćwiartki?

$$\langle 0{,}25;0{,}25\rangle = \langle 0{,}2499\ldots;0{,}2499\ldots\rangle = \tau(0{,}22449999\ldots) = \tau(0{,}2245).$$

Prawie dobrze. Łatwo zauważyć, że odwiedzimy każdy punkt kwadratu. Czy aby tylko jeden raz? Niestety nie. Zobaczmy:

$$\begin{aligned} \tau(0{,}459090\ldots) &= \langle 0{,}499\ldots;0{,}500\ldots\rangle = \langle 0{,}5;0{,}5\rangle,\\ \tau(0{,}540909\ldots) &= \langle 0{,}500\ldots;0{,}499\ldots\rangle = \langle 0{,}5;0{,}5\rangle,\\ \tau(0{,}45) = \tau(0{,}449999\ldots) &= \langle 0{,}499\ldots;0{,}499\ldots\rangle = \langle 0{,}5;0{,}5\rangle. \end{aligned}$$

Funkcja τ **nie jest** różnowartościowa!!

Zastanówmy się jednak, co my tu mamy?

Co prawda, τ nie jest bijekcją, ale w pewien sposób daje się ją odwrócić. Niech bowiem dla punktu kwadratu $\langle x;y\rangle \in K$, liczba $\varphi(x,y)$ będzie liczbą o rozwinięciu $\langle c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots\rangle$, gdzie $\langle c_n\rangle_n = \delta(x)$ i $\langle d_n\rangle_n = \delta(y)$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, φ jest różnowartościowe, choć nie jest surjekcją. Ponadto $\tau \circ \varphi = \mathbf{id}_K$, choć niekoniecznie $\varphi \circ \tau = \mathbf{id}_\Delta$ (przykład?).

Dla przekształcenia φ zbioru X w zbiór Y przyjmiemy oznaczenie $\varphi^\star X$ dla zbioru wartości $\varphi(x)$ dla wszystkich elementów $x \in X$.

Będziemy też używali powszechnie przyjętych terminów:

$\varphi : X \to Y$ jest *surjekcją* (odwzorowaniem „na”), gdy dla każdego $y \in Y$ istnieje taki $x \in X$, że $\varphi(x) = y$;

$\varphi : X \to Y$ jest *injekcją* (odwzorowaniem różnowartościowym), gdy dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ wynika $x_1 = x_2$;

$\varphi : X \to Y$ jest *bijekcją* (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym), gdy jest surjekcją i injekcją.

Ponadto przypominamy, że przekształcenie $\mathbf{id}_X$ to identyczność na zbiorze X,
oraz że

$$\bigcup_{j\in J} X_j := \{x : \text{ istnieje } j \in J, \text{ takie że } x \in X_j\}.$$

Skoro jednak φ jest różnowartościowe, to znaczy, że w Δ jest co najmniej tyle punktów, co w K – no bo φ produkuje w Δ dokładną kopię zbioru K, a jeszcze trochę zostaje (może innym odwzorowaniem i tę resztę da się „łyknąć” – w końcu liczb naturalnych jest tyle samo, co liczb całkowitych). Z drugiej strony punktów zbioru Δ jest co najmniej tyle, ile w K, bo K składa się ze swojej podstawy, która wygląda dokładnie jak Δ, i jeszcze tego, co powyżej. (Odpowiada to injekcji $\pi(r) = \langle r;0\rangle$, dla $r \in \Delta$.)

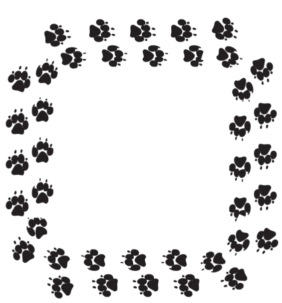
Skoro w Δ jest co najmniej tyle punktów, co w K, a w K jest co najmniej tyle punktów, co w Δ, to na „chłopski rozum” w Δ i w K jest ich tyle samo! Czyli istnieje bijekcja h między Δ i K, a tego przecież nam trzeba.

[*]Pałac Młodzieży w Katowicach

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (3.03.1845, Sankt Petersburg, Rosja – 6.01.1918, Halle, Niemcy) – niemiecki matematyk, twórca teorii zbiorów. Zdefiniował pojęcia równoliczności zbiorów, zbiorów dobrze uporządkowanych. Wprowadził pojęcie liczby porządkowej i kardynalnej. Przez długi czas starał się udowodnić hipotezę continuum (jak się okazało w latach 60. XX wieku – jego wysiłki nie mogły przynieść zadowalającego go rezultatu). W ostatnich latach swojej pracy naukowej odkrył pewne paradoksy w teorii mnogości. Długie lata cierpiał na ciężkie depresje (parokrotnie był z tego powodu hospitalizowany). Pod koniec życia zajmował się mistycyzmem – rozwijał koncepcję Absolutnej Nieskończoności, którą utożsamiał z Bogiem. Z powodu choroby i niemożności uniknięcia paradoksów zaprzestał publikowania prac naukowych.

Felix Bernstein (24.02.1878, Halle, Niemcy – 3.12.1956, Zurich, Szwajcaria) – niemiecki matematyk, uczeń Georga Cantora. Poza przytoczonym twierdzeniem znany z młodzieńczej pracy o liczbach kardynalnych oraz z licznych późniejszych prac ze statystyki, matematyki aktuarialnej oraz biologii matematycznej, w szczególności genetyki.

Ernst Schröder (25.11.1841, Mannheim, Niemcy – 16.06.1902, Karlsruhe, Niemcy) – matematyk niemiecki. Znany głównie ze swoich prac w dziedzinie logiki algebraicznej, w szczególności autor monumentalnego, 3-tomowego dzieła *Wykłady z Algebry Logiki*, która otworzyła drogę logice matematycznej jako samodzielnej dyscyplinie matematycznej.



Formalnie znaczy to, co następuje:

Twierdzenie (Cantor, Bernstein, Schröder). Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Wówczas jeśli istnieją injekcje $f : A \to B$ oraz $g : B \to A$, to istnieje bijekcja $h : A \to B$.

No tak, ale skąd ją wziąć?

Udowodnimy następujący lemat:

Lemat. Niech A, B oraz f, g będą takie, jak wyżej. Wówczas istnieją takie rozłączne zbiory $A_1, A_2 \subseteq A$ i takie rozłączne zbiory $B_1, B_2 \subseteq B$, że $A_1 \cup A_2 = A$, $B_1 \cup B_2 = B$ oraz $f^\star A_1 = B_1$ i $g^\star B_2 = A_2$.

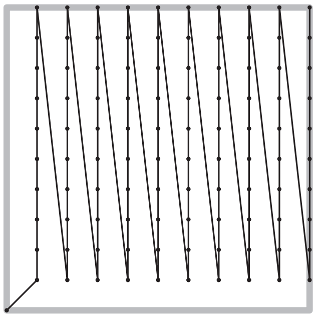
Dowód. Zauważmy, że każdy ze zbiorów A_1, A_2, B_1, B_2 wyznacza już pozostałe. No, bo na przykład $A_1 = A \setminus A_2$, $B_1 = f^\star A_1 = f^\star(A \setminus A_2)$, a $B_2 = B \setminus B_1 = B \setminus f^\star(A \setminus A_2)$. Stąd w szczególności dostajemy też
$$A_2 = g^\star B_2 = g^\star\big(B \setminus B_1\big) = g^\star\big(B \setminus f^\star A_1\big) = g^\star\big(B \setminus f^\star(A \setminus A_2)\big).$$
Oznaczając teraz $\Omega(X) = g^\star\big(B \setminus f^\star(A \setminus X)\big)$, dla $X \subseteq A$, dostajemy równość $A_2 = \Omega(A_2)$! Innymi słowy szukamy tzw. *punktu stałego* odwzorowania Ω.

Nietrudno wykazać, że Ω ma następującą własność.
$$\Omega\left(\bigcup_{j\in J} X_j\right) = \bigcup_{j\in J} \Omega(X_j), \text{dla dowolnych } X_j \subseteq A,\ J \neq \emptyset.$$
Niech teraz $X_0 = \emptyset$, $X_1 = \Omega(X_0)$, $X_2 = \Omega(X_1)$, …, $X_{n+1} = \Omega(X_n)$, … . Wykażemy, że punktem stałym odwzorowania Ω jest np. $Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$. W rzeczy samej, mamy
$$\Omega(Y) = \Omega\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega(X_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = Y\,,$$
no bo przecież $X_0 = \emptyset$. Przyjmując teraz $A_2 = Y$, dostajemy tezę lematu.

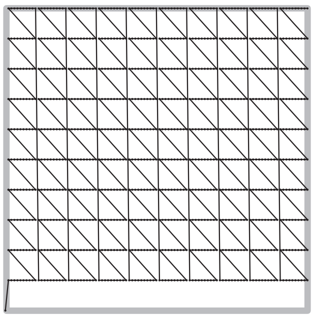
Jak zatem zdefiniować h? To proste:
$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2 \end{cases}.$$
Odwzorowanie h jest dobrze określone na całym A, bo g jest różnowartościowe (a więc można je odwracać). Obrazem A jest całe B, bo punkty z B_1 są wartościami punktów z A_1, a punkty z B_2 są wartościami funkcji g. Skoro f i g są bijekcjami, odpowiednio na A_1 i B_2, oraz B_1 i B_2 są rozłączne, to h jest różnowartościowe.

Wróćmy teraz do naszych baranów, czyli do kwadratu z odcinkiem. W roli A, B, f i g mamy tutaj Δ, K, π oraz φ. Z Lematu wynika, że istnieje $\Delta_2 \subseteq \Delta$, dla którego $h : \Delta \to K$ dane wzorem
$$h(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \notin \Delta_2 \\ \varphi^{-1}(x), & x \in \Delta_2 \end{cases},$$
jest bijekcją. Biorąc pod uwagę, że $\varphi^{-1} = \tau$, możemy napisać, że
$$h(x) = \begin{cases} \tau(x), & x \in \Delta_2 \\ \pi(x), & x \notin \Delta_2 \end{cases}.$$
Teoretycznie odpowiedzieliśmy na pytanie zadane na początku – tak, można zwiedzić cały kwadrat, nie odwiedzając żadnego punktu dwukrotnie (w szczególności znaczy to, że w kwadracie i na odcinku jest tyle samo punktów, ale nie to nas teraz interesuje). Nawet przepis wiążący chwilę czasu z punktem, w którym podróżnik ma się znaleźć, angażuje stosunkowo proste operacje: π i τ. Kłopot polega na tym, że nie wiadomo za bardzo, którą kiedy stosować! Nie wiemy przecież, które punkty odcinka należą do Δ_2!

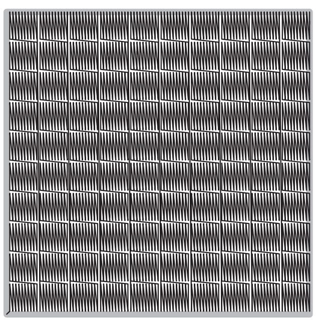
Przyjrzyjmy mu się zatem trochę bliżej. Wiemy przecież, że
$$\Delta_2 = \Omega(\emptyset) \cup \Omega^2(\emptyset) \cup \ldots \cup \Omega^n(\emptyset) \cup \ldots, \quad \text{gdzie } \Omega(X) = \varphi^\star(K \setminus \pi^\star(\Delta \setminus X)).$$
Dla uproszczenia przyjmijmy, że Δ nie jest odcinkiem [0, 1], tylko dolną podstawą kwadratu K (powrót do sytuacji początkowej nie będzie trudny).



$\left\{ h\left(\frac{j}{100} : j = 0, \ldots, 100\right) \right\}$



$\left\{ h\left(\frac{j}{1000} : j = 0, \ldots, 1000\right) \right\}$



$\left\{ h\left(\frac{j}{10000} : j = 0, \ldots, 10000\right) \right\}$

Rys. 2

Giuseppe Peano (27.08.1858, Spinetta, Włochy, – 20.04.1932, Turyn, Włochy) – włoski matematyk i logik. Od 1890 profesor matematyki na Uniwersytecie w Turynie, a w latach 1887–1901 w akademii wojskowej w Turynie. Opracował stosowaną powszechnie aksjomatykę arytmetyki liczb naturalnych (tzw. aksjomaty Peano). Skonstruował też przykład funkcji ciągłej przekształcającej odcinek domknięty na kwadrat domknięty, co jest sprzeczne z powszechną intuicją. Odwzorowanie to jest zwane krzywą Peano. Działalność Peano wchodzi w skład tzw. włoskiej szkoły matematycznej, która zajmowała się badaniami nad logiką matematyczną i analizą podstaw matematyki. Znane jest także jego twierdzenie o istnieniu rozwiązań pewnych równań różniczkowych, zwane jego nazwiskiem.

Wówczas π jest po prostu identycznością, a φ z punktu kwadratu robi punkt z jego podstawy, przeplatając jego współrzędne. Z praw działań na obrazach mamy

$$\Omega(X) = \varphi^\star\big(K \setminus (\Delta \setminus X)\big) = \varphi^\star\big((K \setminus \Delta) \cup (K \cap X)\big) = \varphi^\star\big((K \setminus \Delta) \cup X\big) = \\ = \varphi^\star(K \setminus \Delta) \cup \varphi^\star X$$

i tym sposobem

$$\begin{aligned} \Omega\ (\emptyset) &= \varphi^\star(K \setminus \Delta)\,, \\ \Omega^2(\emptyset) &= \varphi^\star(K \setminus \Delta) \cup \varphi^\star\Omega(\emptyset) = \varphi^\star(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2\star}K \setminus \Delta)\,, \\ &\vdots \\ \Omega^n(\emptyset) &= \varphi^\star(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2\star}(K \setminus \Delta) \cup \ldots \cup \varphi^{n\star}(K \setminus \Delta)\,, \\ &\vdots \\ \text{oraz}\quad \Delta_2 &= \varphi^\star(K \setminus \Delta) \cup \varphi^{2\star}(K \setminus \Delta) \cup \ldots \cup \varphi^{n\star}(K \setminus \Delta) \cup \ldots\,. \end{aligned}$$

W szczególności $0{,}5 = \varphi(0{,}5; 1{,}0) \in \varphi^\star(K \setminus \Delta) \subseteq \Delta_2$.

Mimo iż h spełnia warunki, jakie wyspecyfikowaliśmy na początku, brak mu jednak pewnej cechy, której oczekuje się od „prawdziwych" marszrut. Mianowicie, jeśli ktoś spaceruje po jakimś terenie i np. o 15^{00} wstąpi do restauracji na obiad, to spodziewamy się, że istnieje przedział czasowy wokół tej godziny o tej własności, że w każdej chwili tego przedziału nasz piechur znajduje się w miejscowości, w której ta restauracja się znajduje.

Innymi słowy, od naszego h oczekujemy, że dla dowolnego punktu $x_0 \in \Delta$ (godzina posiłku) oraz otoczenia O (miejscowość) punktu $h(x_0)$ (restauracja) istnieje przedział Λ zawierający x_0 taki, że $h(x) \in O$, dla $x \in \Lambda$. Własność tę nazywamy *ciągłością*.

Okazuje się, że odwzorowanie h ciągłe nie jest. Popatrzmy na punkty kwadratu postaci $P_n = \langle 0{,}5 + \frac{1}{10^n}; \frac{1}{10^n}\rangle$, dla $n = 3, 4, 5, \ldots$. Rozwinięcia ich współrzędnych są postaci

$$0{,}5\overbrace{0\ldots0}^{n-2}1000\ldots = 0{,}5\overbrace{0\ldots0}^{n-1}999\ldots \quad \text{oraz} \quad 0{,}0\overbrace{0\ldots0}^{n-2}1000\ldots = 0{,}0\overbrace{0\ldots0}^{n-1}999\ldots,$$

$$\text{zatem} \qquad \varphi(P_n) = 0{,}5\overbrace{0\ldots0}^{2n-1}999 \;=\; 0{,}5\overbrace{0\ldots0}^{2n-2}1000\ldots\,.$$

Znaczy to w szczególności, że punkty $x_n = 0{,}5 + 10^{-2n}$ są w Δ_2, oraz że $h(x_n) = P_n$, gdzie $n \geqslant 3$. Odległość między $h(0{,}5) = \langle 0{,}5; 1{,}0\rangle$ a P_n wynosi

$$\sqrt{10^{-2n} + (1 - 10^{-n})^2} > 1 - 10^{-n} \geqslant 1 - 10^{-3} = 0{,}999000\ldots\,.$$

W szczególności nie ma takiego przedziału wokół „chwili" $x_0 = 0{,}5$, żeby w całym tym przedziale wartości h były w odległości od $h(0{,}5)$ mniejszej niż np. $3/4$.

Rysunek 2 przedstawia kilka migawek z podróży naszego piechura.

Nietrudno jest wykazać, że nie istnieje ciągłe i różnowartościowe odwzorowanie odcinka na kwadrat. Wynika to mniej więcej z tego, że jak się w kwadracie zrobi dziurkę (czytaj: usunie punkt), to i tak będzie można dojść z jednego miejsca w drugie. Na odcinku już tak dobrze nie jest. Okazuje się jednak, że istnieje ciągłe odwzorowanie odcinka na kwadrat (tzw. *krzywa Peano*), ale to jest już temat na osobny artykuł.

Rozwiązanie zadania M 1199.

Niech $n = a^2 + b^2 + c^2$ oraz przyjmijmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b \geqslant c$. Wówczas

$$\begin{aligned} n^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 = \\ &= (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2) + 4b^2c^2 + 4c^2a^2 = \\ &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2bc)^2 + (2ca)^2\,. \end{aligned}$$

Ponieważ $a^2 + b^2 - c^2 > 0$, więc liczba n^2 została przedstawiona w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych dodatnich.