# O empirii i teorii na przykładzie uogólnienia gry Penneya

*Andrzej WALAT*

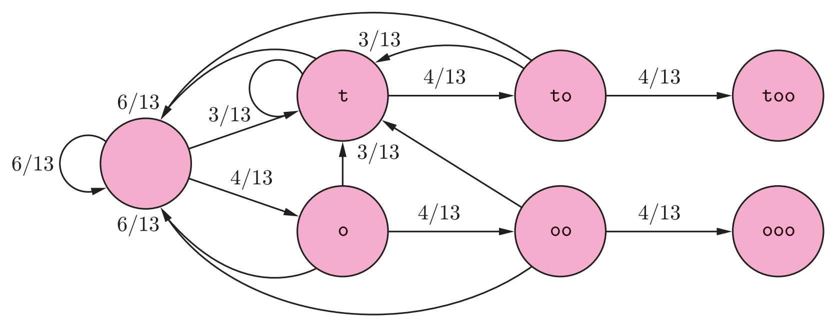
W tym artykule przedstawię rozwiązanie problemu znacznie bardziej ogólnego niż zadanie o grze Penneya opisane w lutowym numerze *Delty* i w książce [1]. Przy okazji pozwolę sobie na komentarz o teorii i empirii w matematyce i informatyce.

## Zadanie

Dane jest hasło – jakieś dowolne słowo – na przykład `tobeornottobe`. Alicja i Bob wybierają jakieś słowa utworzone z liter występujących w haśle, na przykład Alicja wybiera `too`, a Bob `ooo`. Następnie uruchamiamy maszynkę losującą, która losuje litery z hasła tak długo, aż wypadnie słowo wybrane przez Alicję lub Boba. Jeśli będzie to słowo wybrane przez Alicję (w naszym przykładzie `too`), to wygrywa Alicja, a w przeciwnym przypadku wygrywa Bob. Jak obliczyć szanse graczy w tej grze?

W szczególnym przypadku, gdy hasło jest dwuliterowym słowem `or` (albo `ro`), otrzymujemy klasyczną grę Penneya. Ale jeśli hasłem jest `oro`, to już jest inna gra. Maszynka losująca wybiera litery `o` oraz `r` z prawdopodobieństwem odpowiednio 2/3 oraz 1/3. Do tego przypadku nie stosuje się znane rozwiązanie klasycznego problemu gry Penneya pochodzące od Johna Conwaya.
Ale w numerze lutowym opisałem inne algorytmiczne rozwiązanie problemu, które spróbuję teraz uogólnić. Ideę rozwiązania przedstawię na przykładzie.

Zaczynamy od narysowania grafu gry.




Rys. 1

Pola (wierzchołki) grafu odpowiadają siedmiu stanom gry. Stan początkowy jest reprezentowany przez słowo puste. Dwa stany końcowe `too` oraz `ooo` to odpowiednio wygrana Alicji oraz wygrana Boba. Od każdego pola, prócz dwóch końcowych, prowadzą trzy strzałki do innych pól. Przypisujemy im wagi oznaczające prawdopodobieństwa przejścia od danego pola (stanu gry) do odpowiedniego następnego pola (stanu gry).

W polach grafu zamiast słów będę wpisywał liczby.

Wpisujemy wartości liczbowe w polu początkowym oraz polach `t` oraz `o` – pierwszych polach na ścieżkach prowadzących do wygranej Alicji i Boba.

W polu początkowym wpisujemy liczbę 0.

W pierwszym polu na ścieżce Alicji wpisuję liczbę 1.

Te dwie liczby wybrałem dowolnie. Mógłbym wybrać inne liczby. Dalej jednak wpisując nowe liczby do kolejnych pól, będę przestrzegał **zasady średniej ważonej**:

*Jeśli z pola $p$ wychodzą 3 strzałki z wagami $w_1$, $w_2$, $w_3$ odpowiednio do pól $p_1$, $p_2$ oraz $p_3$, to wartości liczbowe w tych polach $l$, $l_1$, $l_2$ oraz $l_3$ muszą spełniać następującą równość: $w_1 \cdot l_1 + w_2 \cdot l_2 + w_3 \cdot l_3 = l$.*

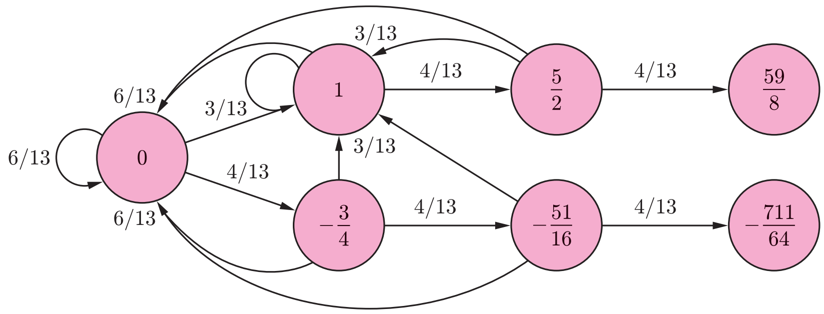
Inaczej mówiąc, wartość liczbowa w polu $p$ musi być średnią ważoną liczb w polach $p_1$, $p_2$ oraz $p_3$.

Z pola początkowego grafu wychodzą trzy strzałki: z powrotem do tego pola oraz do pól `t` i `o`. Liczba w polu `o` musi spełniać następujące równanie z jedną niewiadomą $x$ :

$$\frac{6}{13} \cdot 0 + \frac{3}{13} \cdot 1 + \frac{4}{13} \cdot x = 0.$$

Rozwiązujemy równanie i wynik $x = -3/4$ wpisujemy do pola `o`.

Postępując dalej w ten sposób, otrzymujemy:




Rys. 2

Prawdopodobieństwo sukcesu Alicji obliczamy ze wzoru: $p = \frac{|B|}{A-B}$, gdzie $A$ oraz $B$ to liczby w polach końcowych grafu odpowiadających wygranej Alicji oraz Boba. W naszym przykładzie $p = \frac{711}{1183} \approx 0{,}601$.

Pełny zapis zarysowanego algorytmu w postaci procedur w Logo znajduje się w aneksie do tego artykułu na stronie WWW *Delty*, ale pozostaje jeszcze otwarta kwestia poprawności. Jak możemy się przekonać, że algorytm daje poprawne wyniki?

W matematyce przekonanie niepoparte dowodem nazywamy hipotezą. Standardową metodą weryfikacji hipotez jest dowód. W naukach przyrodniczych ceni się weryfikacje empiryczne. Informatyka zawdzięcza wiele matematyce, ale przejęła również pewne elementy nauk przyrodniczych. Liczą się nie tylko formalne matematyczne dowody, ale również empiryczne weryfikacje.

## Budujemy komputerowy model gry

Dla danego hasła oraz słów Alicji i Boba wynik gry jest taki, jaki daje kontynuacja gry od jej stanu początkowego – słowa pustego.

```
oto gra :hasło :alicja :bob
wynik kontynuacjaGry "
już
```

Wynik kontynuacji gry od dowolnego (aktualnego) stanu ustalamy w następujący sposób. Jeśli aktualny stan jest słowem końcowym Alicji lub Boba, to wynikiem jest ten stan. W przeciwnym przypadku wynik daje kontynuacja gry od następnego stanu.

```
oto kontynuacjaGry :stan
jeśli lub (:stan =:alicja) (:stan = :bob)
                                        [wynik :stan]
wynik kontynuacjaGry następny :stan
już
```

Następny stan to najdłuższy sufiks słowa utworzonego z danego stanu i litery wybranej losowo z hasła, będący prefiksem jednego ze słów końcowych Alicji lub Boba.

```
oto następny :stan
wynik suprefiks słowo :stan los :hasło :alicja
                                            :bob
już
```

```
oto suprefiks :s1 :s2 :s3
jeśli puste? :s1 [wy :s1]
jeśli lub numel :s1 :s2 = 1 numel :s1 :s3 = 1
                                          [wy :s1]
wynik suprefiks bp :s1 :s2 :s3
już
```

Zdefiniuję jeszcze pomocniczą funkcję `czsa`, która dla danego hasła i słów Alicji i Boba oblicza częstość sukcesów Alicji w serii $n$ gier.

```
oto czsa :hasło :alicja :bob :n
niech "l 0
powtórz :n [jeśli gra :hasło :alicja :bob
                          = :alicja [zwiększ "l]]
wynik :l / :n
już
```

Teraz możemy już skonfrontować nasz wynik teoretyczny z eksperymentem. Po napisaniu polecenia: `powtórz 10 [pisz czsa "tobeornottobe "too "ooo 10000]` na ekranie mojego laptopa pojawiło się dziesięć empirycznych częstości: `0.6039`, `0.6045`, `0.6008`, `0.6001`, `0.6008`, `0.6103`, `0.5984`, `0.6017`, `0.6004`, `0.5976`.

## Ciekawostka

Jakie byłyby szanse Alicji w pojedynku z Bobem, gdyby wybrała ona dwuliterowe słowo `to`, a Bob – słowo `oo`? W artykule [2] obliczyłem, że aby losując litery z hasła `tobeornottobe` otrzymać `to`, potrzeba średnio $\frac{13}{4} \cdot \frac{13}{3} = \frac{169}{12} \approx 14{,}08$ losowań. Na wygenerowanie słowa `oo` trzeba średnio czekać trochę krócej (patrz [3]) $\frac{13}{4} + (\frac{13}{4})^2 = \frac{221}{16} \approx 13{,}81$.

Mogłoby się wydawać, że w takim przypadku Alicja ma trochę mniejsze szanse wygrania pojedynku niż Bob, ale to nieprawda. Słowo `to` wygrywa z `oo` w stosunku 51:40, czyli prawdopodobieństwo, że to Alicja zwycięży, jest równe $\frac{51}{91} \approx 0{,}56$.

**Literatura**


[1] Graham L. R. L., Knuth D. E., Patshnik O. (1996). *Matematyka konkretna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

[2] Walat A. *Grać albo nie grać*. Delta 10/2007.

[3] Walat A. *Empiryczne badanie uogólnionej wersji gry Hamleta*. Delta 11/2007.