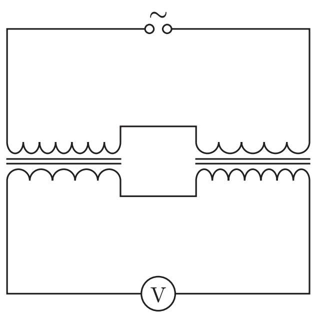
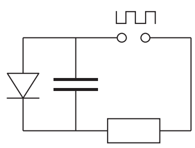
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2008



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 454, 455

Redaguje Jerzy B. BROJAN

454. Zaproponowano następujący sposób wystrzeliwania statków kosmicznych: należy wydrążyć szyb na wylot przez Ziemię, upuścić do niego rakietę i włączyć silnik rakiety w chwili jej przelotu przez środek Ziemi. O jaką część zmniejszyłoby się zużycie paliwa przy wystrzeleniu tą metodą statku z II prędkością kosmiczną? Przyjąć założenia upraszczające: a) brak oporu powietrza, b) stała gęstość Ziemi, c) krótki czas działania silnika, d) bardzo wielka prędkość wylotu gazów z dyszy silnika (równoważne założenie: zużycie paliwa nie wpływa na zmianę masy statku).

455. Połączono szeregowo uzwojenie pierwotne transformatora z uzwojeniem wtórnym drugiego identycznego transformatora i zestaw podłączono do napięcia przemiennego o wartości skutecznej $U_1 = 100\,\mathrm{V}$. Drugie uzwojenia również połączono szeregowo (rys. 1) i zmierzono łączne napięcie, które okazało się równe $U_2 = 50\,\mathrm{V}$. Ile wynosi przekładnia transformatorów?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2007

Przypominamy treść zadań:

446. Do źródła napięcia o przebiegu prostokątnym (tzn. $U = +U_0$ w ciągu czasu T, następnie $U = -U_0$ w takim samym przedziale czasu) przyłączono obwód składający się z opornika o oporze R, kondensatora o pojemności C oraz diody doskonale przewodzącej w kierunku przewodzenia i całkowicie nieprzewodzącej w kierunku zaporowym (schemat obwodu – rys. 2). Jak długo płynie prąd przez diodę w ciągu jednego okresu zmian napięcia?

447. Jednorodny walec o promieniu r wisi na dwóch pętlach lekkiej i nierozciągliwej nitki, a odległość osi walca od poziomu zawieszenia jest równa l. Odległość końców każdej z nitek jest równa $2r$. Obliczyć częstotliwość małych drgań takiego wahadła – oś walca pozostaje równoległa do jej kierunku w położeniu równowagi.

446. Prawoskrętny przepływ prądu w obwodzie zaczyna się w chwili, gdy napięcie przyjmuje odpowiedni znak (plus z prawej). Jak wykażemy dalej, kondensator jest wtedy w stanie rozładowanym. Rozwiązując odpowiednie równanie różniczkowe, znajdujemy zależność ładunku kondensatora od czasu:

$$Q(t) = U_0C(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}),$$

przy czym dolna okładka będzie naładowana dodatnio. Po przełączeniu znaku napięcia dioda pozostaje jeszcze zablokowana, a prąd zaczyna płynąć lewoskrętnie. Jego natężenie jest większe niż w poprzedniej połowie cyklu, gdyż do napięcia źródła dodaje się napięcie na kondensatorze, początkowo równe

$$U_0(1 - \mathrm{e}^{-T/RC}).$$

Ponownie rozwiązując to samo równanie różniczkowe, znajdujemy

$$Q(t) = U_0C(-1 + (2 - \mathrm{e}^{-T/RC})\mathrm{e}^{-t/RC}).$$

W chwili, gdy Q spada do zera, prąd zaczyna płynąć przez diodę, a kondensator pozostaje dalej rozładowany. Przyrównując do zera wyrażenie

$$-1 + (2 - \mathrm{e}^{-T/RC})\mathrm{e}^{-T_1/RC},$$

obliczamy

$$T_1 = RC\ln(2 - \mathrm{e}^{-T/RC}).$$

Szukany czas działania diody wynosi $T - T_1$; łatwo wykazać, że jest to wielkość dodatnia.

447. Oznaczmy współrzędne przesunięcia osi walca przez x i y. Długość lewego prostoliniowego odcinka nici a i prawego b (zob. rys. 3) można wyznaczyć z równań

$$(r + x)^2 + (l - y)^2 = r^2 + a^2 \qquad (r - x)^2 + (l - y)^2 = r^2 + b^2,$$

natomiast kąty α i β – z równań

$$a\sin\alpha = x + r(1 - \cos\alpha) \qquad b\sin\beta = x - r(1 - \cos\beta).$$

Zgodnie z zasadą przybliżenia małych drgań należy ograniczyć się do wyrazów kwadratowych w x, a liniowych w y. Rozwijając wszystkie wyrażenia według tej zasady, dochodzimy do wzorów:

$$a = l + \frac{rx}{l} - y + \frac{x^2}{2l} - \frac{r^2x^2}{2l^3}, \qquad b = l - \frac{rx}{l} - y + \frac{x^2}{2l} - \frac{r^2x^2}{2l^3}.$$

$$\alpha = \frac{x}{l} - \frac{rx^2}{2l^3}, \qquad \beta = \frac{x}{l} + \frac{rx^2}{2l^3}.$$

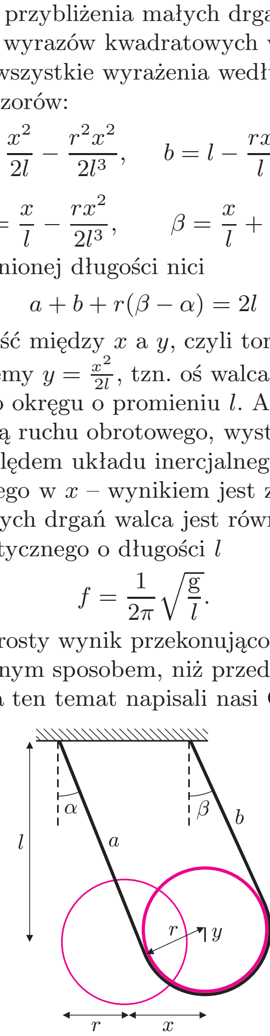
Warunek niezmienionej długości nici

$$a + b + r(\beta - \alpha) = 2l$$

wyznacza zależność między x a y, czyli tor ruchu walca. Otrzymujemy $y = \frac{x^2}{2l}$, tzn. oś walca porusza się w przybliżeniu po okręgu o promieniu l. Aby uwzględnić energię kinetyczną ruchu obrotowego, wystarczy znaleźć kąt obrotu walca względem układu inercjalnego z dokładnością do wyrazu liniowego w x – wynikiem jest zero. Zatem częstotliwość małych drgań walca jest równa częstotliwości wahadła matematycznego o długości l

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Czy można ten prosty wynik przekonująco uzasadnić mniej pracochłonnym sposobem, niż przedstawiono wyżej? Zobaczymy, co na ten temat napisali nasi Czytelnicy.



Rys. 3

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 2008

Errata
W rozwiązaniu firmowym zadania 546 (*Delta* 1/2008) został w dwóch miejscach błędnie wydrukowany wynik – w ostatnim wierszu środkowego akapitu oraz w ostatnim wierszu całego rozwiązania: oba razy zamiast $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ powinno być $\lceil (n+1)/2 \rceil$ (podane rozumowanie daje właśnie ten ostatni wynik).

Przepraszamy Czytelników za chochlika, który „sufit” zastąpił „podłogą”.

Zadania z matematyki nr 557, 558

Redaguje Marcin E. KUCZMA

557. Okrąg przechodzący przez wierzchołki A, B kwadratu $ABCD$ przecina odcinki BC i BD odpowiednio w punktach P i Q (różnych od B, C i D). Okrąg przechodzący przez punkty C, P, Q przecina odcinek BD w punktach Q i R. Wykazać, że punkty P, R i A są współliniowe.

558. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) dodatnich liczb całkowitych względnie pierwszych, dla których istnieje dodatnia liczba całkowita x, spełniająca warunki:
$1 + x + \ldots + x^{m-1}$ dzieli się przez n,
$1 + x + \ldots + x^{n-1}$ dzieli się przez m.

Zadanie 558 zaproponował pan Krzysztof Dorobisz z Krakowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2007

Przypominamy treść zadań:

549. Dany jest trójkąt ABC o bokach długości $|AB| > |BC| > |CA|$. Odcinek CK jest jego wysokością; punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i AC. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN leży na prostej PQ.

550. Dla każdej liczby rzeczywistej a wyznaczyć kres dolny zbioru tych liczb rzeczywistych x, które spełniają nierówność $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geqslant a$. (Symbol $\{x\}$ oznacza tu liczbę $x - \lfloor x \rfloor$).

549. Z określenia punktów P i Q wynika, że

$$|AP| = |AQ| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2},$$

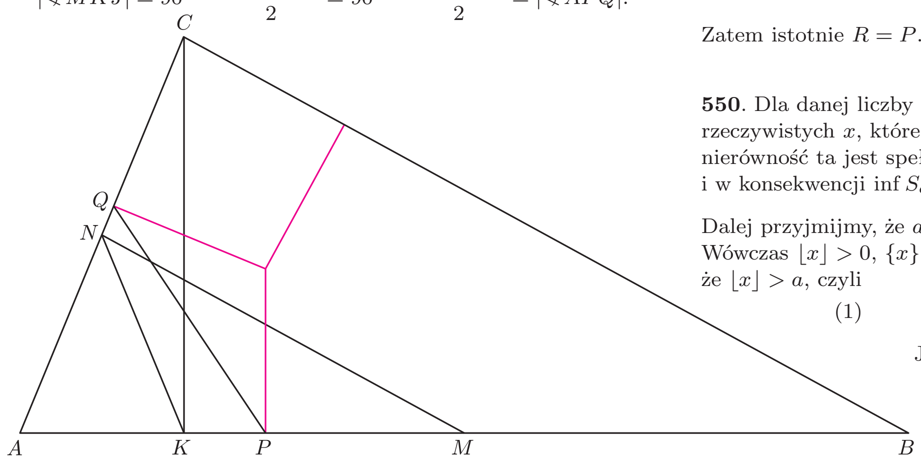
$$|\sphericalangle APQ| = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle BAC|}{2}.$$

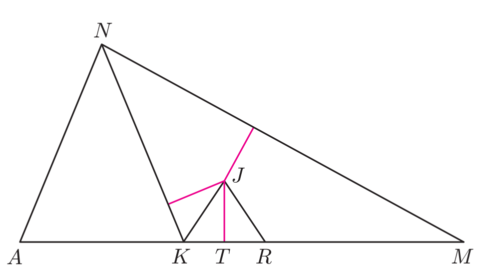
Oznaczmy środek okręgu wpisanego w trójkąt KMN przez J, a jego punkt styczności z bokiem KM przez T; zatem

$$|KT| = \frac{|KM| + |KN| - |MN|}{2}.$$

Punkt N jest środkiem przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego AKC, więc trójkąt AKN jest równoramienny: $|AN| = |KN|$, $|\sphericalangle AKN| = |\sphericalangle KAN| = |\sphericalangle BAC|$. Dwusieczna jego kąta zewnętrznego MKN przechodzi przez punkt J; stąd

$$|\sphericalangle MKJ| = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle AKN|}{2} = 90^\circ - \frac{|\sphericalangle BAC|}{2} = |\sphericalangle APQ|.$$





Niech R będzie punktem symetrycznym do K względem T. Trójkąt KRJ jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle ARJ| = |\sphericalangle MKJ| = |\sphericalangle APQ|.$$

Ta równość pokazuje, że $RJ \| PQ$.

Aby dowieść, że prosta PQ przechodzi przez J, wystarczy teraz wykazać, że punkt R pokrywa się z P. Wykorzystując wcześniejsze zależności, obliczamy:

$$\begin{aligned} |AR| &= |AK| + |KR| = |AK| + 2 \cdot |KT| = \\ &= |AK| + |KM| + |KN| - |MN| = \\ &= |AM| + |KN| - |MN| = \\ &= |AM| + |AN| - |MN| = \\ &= \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = |AP|. \end{aligned}$$

Zatem istotnie $R = P$.

550. Dla danej liczby a niech S_a będzie zbiorem tych liczb rzeczywistych x, które spełniają podaną nierówność. Gdy $a \leqslant 0$, nierówność ta jest spełniona przez każdą liczbę całkowitą x, i w konsekwencji $\inf S_a = -\infty$.

Dalej przyjmijmy, że $a > 0$. Weźmy dowolną liczbę $x \in S_a$. Wówczas $\lfloor x \rfloor > 0$, $\{x\} > 0$, i z nierówności $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geqslant a$ wynika, że $\lfloor x \rfloor > a$, czyli

$$(1) \qquad \lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor a \rfloor + 1.$$

Jeżeli zachodzi tu równość $\lfloor x \rfloor = \lfloor a \rfloor + 1$, to

$$(2) \quad x = \lfloor x \rfloor + \{x\} \geqslant \lfloor x \rfloor + \frac{a}{\lfloor x \rfloor} = \lfloor a \rfloor + 1 + \frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1}.$$

Otrzymana po prawej stronie liczba – nazwijmy ją x_a – spełnia warunek

$$\lfloor x_a \rfloor \cdot \{x_a\} = \big(\lfloor a \rfloor + 1\big) \cdot \frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1} = a,$$

więc należy do zbioru S_a.

Każda liczba $x \in S_a$, dla której nierówność (1) jest ostra, jest większa od x_a. Stąd wniosek, że dla $a > 0$ kresem dolnym zbioru S_a jest liczba x_a, napisana po prawej stronie wzoru (2).

Odpowiedź na zagadkę **mmm**. Renault – rząd dwa, recycling – rząd trzy.