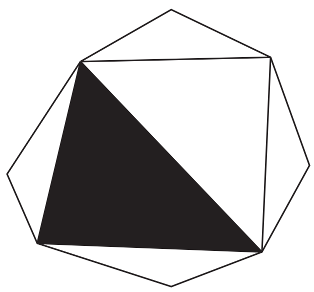
Informatyczny kącik olimpijski (6) – od przybytku głowa (nie) boli

Tym razem dwa zadania „z haczykiem”.

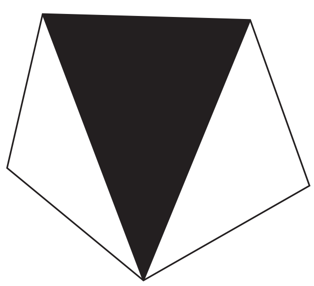
Pierwsze zadanie (VI OI): mamy triangulację n-kąta wypukłego za pomocą nieprzecinających się przekątnych. Jeden z trójkątów tej triangulacji jest pomalowany na czarno (rysunek 1). Dwaj gracze na przemian odcinają od wielokąta po jednym trójkącie. Gracz, który odetnie czarny trójkąt, wygrywa. Na wejściu mamy liczbę n oraz opis triangulacji w postaci listy $n-2$ trójek (a, b, c) definiujących kolejne trójkąty (wierzchołki wielokąta są ponumerowane kolejno od 1 do n). Czarny trójkąt jest wymieniony jako pierwszy. Musimy odpowiedzieć na pytanie: który gracz ma strategię wygrywającą?



Rys. 1

I drugie zadanie (BOI 2001): wiejski listonosz roznosi pocztę po okolicy. Każda wieś leży przy drodze albo na przecięciu dwóch lub czterech dróg, zatem można z niej wyjść w 2, 4 lub 8 kierunkach (niektóre drogi mogą prowadzić ze wsi do niej samej, a pomiędzy dwiema wsiami może być więcej niż jedna bezpośrednia droga). Budynek poczty jest w jednej ze wsi. Listonosz musi odwiedzić wszystkie wsie, a ponadto musi przejść wzdłuż wszystkich dróg (przy nich też stoją domy) i wrócić na pocztę. Za przejście każdej mili poczta płaci listonoszowi 1EUR. Ponadto mieszkańcy każdej wsi chcą, aby listonosz odwiedził ich jak najwcześniej, dlatego poczta zawarła z każdą ze wsi (wsie numerujemy liczbami $i = 1, \ldots, n$) umowę, w której określona jest pewna liczba $w(i)$: mianowicie, jeśli listonosz odwiedzi wieś numer i jako k-tą w kolejności (tzn. odwiedził wcześniej dokładnie $k-1$ *różnych* innych wsi) oraz $k \leqslant w(i)$, to wieś dopłaca poczcie $w(i) - k$ EUR, a jeśli $k > w(i)$, to poczta karnie płaci wsi $k - w(i)$ EUR. Jak wyznaczyć trasę listonosza, aby zmaksymalizować zysk (ew. zminimalizować stratę) poczty? Na wejściu mamy daną liczbę wsi n, opis grafu dróg i umówione wartości $w(i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Teraz chwila dla Czytelnika na samodzielne rozwiązanie tych (nietrudnych) zadań...



Rys. 2

Gotowe? Rozwiążmy pierwsze zadanie. Jeśli czarny trójkąt znajduje się na brzegu wielokąta, to pierwszy gracz odcina go w jednym kroku i wygrywa. Jeśli nie, to każdy z graczy będzie starał się uniknąć doprowadzenia do takiej sytuacji. Dwa ruchy przed końcem otrzymamy zatem pięciokąt z rysunku 2, po czym gracz, którego ruch przypada, będzie zmuszony doprowadzić do pozycji wygrywającej dla swego przeciwnika. Wcześniejszy przebieg gry nie ma większego znaczenia – gracze odcinają zawsze po jednym trójkącie. Widzimy, że wynik zależy tylko od parzystości n (jeśli n jest parzyste wygrywa gracz, który rozpoczyna grę), a i sama strategia jest prosta i brzmi: odcinaj cokolwiek, byle nie odsłonić czarnego trójkąta z dwóch stron. Całe zadanie można więc rozwiązać w czasie stałym, sprawdzając jedynie czy czarny trójkąt leży na brzegu (jego współrzędne to wówczas trzy kolejne liczby modulo n), a jeśli nie, to czy $2|n$. Nie trzeba, a wręcz nie warto, wczytywać nadmiarowego opisu triangulacji!

Co z zadaniem drugim, które, jak wszystkie problemy optymalizacyjne, wydaje się trudniejsze? Najpierw zmaksymalizujmy zysk poczty względem wiosek, a wyzyskiwaniem samego listonosza zajmiemy się później. Każda wioska wypłaca poczcie kwotę (być może ujemną):

$$w(i) - k(i),$$

gdzie $k(i)$ jest pozycją tej wioski na liście kolejno odwiedzonych wsi przy danej trasie listonosza. Ciąg $k(1), k(2), \ldots, k(n)$ jest permutacją liczb $1, 2, \ldots, n$ – każda wioska została odwiedzona jako *któraś* z kolei. Zatem suma wszystkich wpłat wynosi:

$$\sum_i (w(i) - k(i)) = \sum_i w(i) - \sum_i k(i) =$$
$$= \sum_i w(i) - n(n+1)/2,$$

co nie zależy w ogóle od kolejności odwiedzin, a zatem pod tym względem każda trasa listonosza jest jednakowo dobra! Pozostaje zauważyć, że graf dróg ma cykl Eulera (bo stopień każdego wierzchołka jest parzysty), a zatem istnieje trasa, która z każdej drogi korzysta dokładnie raz i niewątpliwie minimalizuje ona pensję listonosza, bo i tak wymagamy od niego przejścia wszystkich dróg. Wynika stąd, że wystarczy po prostu znaleźć w grafie jakikolwiek cykl Eulera (można to robić np. zachłannie). Zatem i w tym zadaniu mieliśmy nadmiarowe dane: wartości $w(i)$ i cała otoczka związana z optymalizacją służyły tylko mydleniu oczu rozwiązującego!

Michał ADAMASZEK