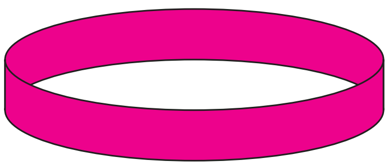
## Zakleić się nie da!*

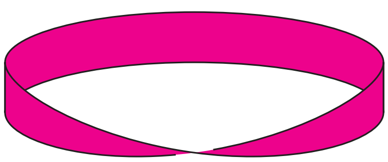
W poprzednim numerze zabawy ze wstęgą Möbiusa (i innymi, podobnymi do niej wstęgami) polegały na cięciu tej wstęgi na najrozmaitsze sposoby. Wobec tego teraz zajmiemy się czymś wręcz przeciwnym – będziemy ją zaklejać.



wstęga rzędu 0, czyli powierzchnia boczna walca

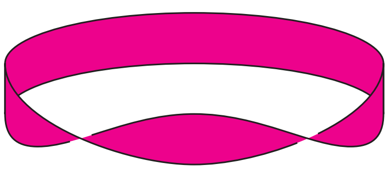
### *Przypominamy, o czym mowa*

Jeśli pasek, np. papieru, w kształcie długiego prostokąta połączymy (np. skleimy) krótszymi bokami, to otrzymamy jedną z wielu figur, a która to będzie, zależy od tego, ile razy obrócimy przed sklejeniem pasek względem jego dłuższej osi. Gdy wcale nie odwrócimy (wstęga rzędu 0), będzie to powierzchnia boczna walca. Gdy raz obrócimy o $180^\circ$ (wstęga rzędu 1), będzie to wstęga Möbiusa. Wstęgi wyższych rzędów nie mają już „osobistych” nazw. Nazywa się je po prostu wstęgami rzędu 2, 7 czy 100.



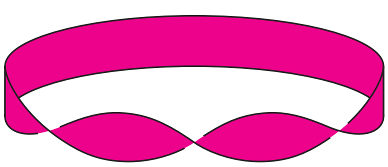
wstęga rzędu 1, czyli wstęga Möbiusa

### Eksperyment 1. Co jest brzegiem wstęgi?



wstęga rzędu 2

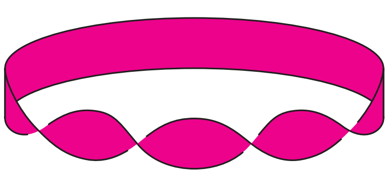
Wzdłuż brzegu wyciętego z papieru koła przyklej cienki drucik i połącz jego stykające się końce. Podpal papier i poczekaj, aż się całkowicie wypali. Pozostanie sam drut, który będzie miał kształt okręgu. Wykonajmy takie samo doświadczenie z prostokątną kartką. Po niewielkiej deformacji okaże się, że i tym razem otrzymaliśmy okrąg. Gdy to samo doświadczenie przeprowadzimy z powierzchnią boczną walca, to okaże się (co i bez tego widać), że jej brzegiem są dwa okręgi. A co będzie, gdy to doświadczenie przeprowadzimy ze wstęgą Möbiusa? Tym razem otrzymamy to samo, co dla koła czy prostokąta, czyli okrąg.



wstęga rzędu 3

### Eksperyment 2. Zaklejamy koło kołem

Jeśli dwie figury mają taki sam brzeg, to możemy te brzegi skleić. Co otrzymamy, sklejając w ten sposób brzegi dwóch kół? Ktoś powie, że placek. Ale bardziej wnikliwy obserwator zauważy, że raczej jest to coś takiego, jak sfera, czyli powierzchnia kuli – przecież koła są połączone tylko na brzegu, więc gdyby je porządnie nadmuchać…

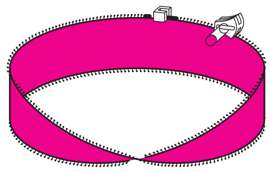


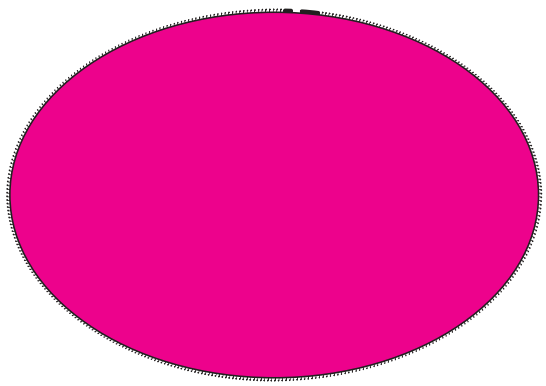
wstęga rzędu 4

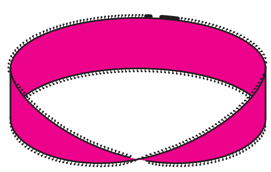
### Eksperyment 3. Zaklejamy wstęgę Möbiusa kołem

Ponieważ brzeg koła i brzeg wstęgi Möbiusa to okręgi, więc zobaczmy, co wyjdzie, gdy je skleimy. Próba wykonania tego eksperymentu kończy się jednak niepowodzeniem. Z czego to wynika: z braku sprawności naszych palców, ze złej jakości kleju, czy też może z niewykonalności zadania, którego się podjęliśmy?

*__mmm__ – magazyn miłośników matematyki; `http://www.mmm.uni.wroc.pl`







*Zmieniamy materiał na niezawodny, czyli bierzemy się do szycia*

Potrzebny nam będzie suwak jak do rozpinanej kurtki (żeby po rozpięciu był w dwóch częściach) – im dłuższy, tym lepszy. Jeśli ktoś trafi na taki ze zużytego śpiwora, będzie miał większy komfort pracy i bardziej efektowny wynik. Następnie z płótna wykonujemy wstęgę Möbiusa taką, by jej brzeg miał długość suwaka (jaka jest potrzebna długość płóciennego paska? – oczywiście dwa razy mniejsza niż suwaka, prawda?). Do brzegu przyszywamy jedną część suwaka. Potem z płótna wycinamy koło. Ma ono mieć obwód taki, jak długość suwaka (jaki zatem ma promień? – to już każdy umie obliczyć). Do brzegu koła przyszywamy drugą część suwaka. A teraz zapinamy suwak. I co? Najpierw idzie nieźle, potem trudniej, a zapiąć do końca się nie da. Dlaczego? Suwak sprawdzony, co więc stoi na przeszkodzie?

Przeszkoda jest poważna. Powierzchnia, która powstaje z zaklejenia wstęgi Möbiusa kołem, to *płaszczyzna rzutowa* i jest to obiekt, który nie mieści się w przestrzeni trójwymiarowej. Zatem mamy w ręku obiekt z przestrzeni czterowymiarowej wykonany z płótna i suwaka – to znaczy nie mamy, ale mielibyśmy, gdyby udało się zapiąć do końca!

### Eksperyment 4. Zaklejamy wstęgę Möbiusa wstęgą Möbiusa

Poprzednio wypracowana technologia da się zastosować do dwóch, tej samej wielkości wstęg Möbiusa. Brzeg każdej z nich obszywamy suwakiem. I każdy może się przekonać, że i tym razem suwak zapiąć się nie da. Gdyby się zapiął, mielibyśmy inny niemieszczący się w przestrzeni trójwymiarowej obiekt: *butelkę Kleina*. Jej fotografie (oczywiście nie do końca zapiętej) można obejrzeć na tylnej okładce tego numeru.

A oto dalsze propozycje zabawy z wstęgami.

### Eksperyment 5. Ile jest miejsca na kartce papieru?

Zaznacz na kartce pięć domów. Między każdymi dwoma poprowadź ścieżki, tak aby nie przecinały się nawzajem. Okazuje się to niemożliwe. A jeśli skleimy z kartki powierzchnię boczną walca? Ale jeśli skleimy z niej wstęgę Möbiusa, to połączenie będzie możliwe! A gdy będzie to wstęga rzedu 2? A jeśli domów będzie 6? Sprawdź.

Podobna jest sytuacja w zadaniu z trzema domkami i trzema studniami: chodzi o narysowanie nieprzecinających się dróg łączących każdą studnię z każdym domkiem – na płaszczyźnie zaplanować takich dróg nie można. A czy coś się zmieni, gdy z kartki skleimy powierzchnię boczną walca albo którąś z innych wstęg?

### Eksperyment 6. Jak pokolorować mapę?

Narysuj na kartce dowolną mapę, na której państwa graniczą zawsze wzdłuż linii i składają się z jednego kawałka (np. mapę Europy trzeba więc nieco zmienić). Pokoloruj ją tak, aby sąsiednie państwa były zaznaczone innym kolorem. Ilu kolorów musiałeś użyć?

Podobne doświadczenie wykonano kiedyś dla wielu tysięcy map i nie znaleziono żadnej, do pomalowania której potrzebny byłby piąty kolor. W 1840 r. August Möbius postawił hipotezę, że do pokolorowania dowolnej mapy wystarczą cztery barwy. Udało się ją udowodnić dopiero w 1976 r. dwóm amerykańskim matematykom Kennethowi Appelowi i Wolfgangowi Hakenowi. Czy podobnie jest dla map umieszczonych na wstędze Möbiusa? Może wystarczą tam tylko 3 kolory? A może potrzeba ich więcej?