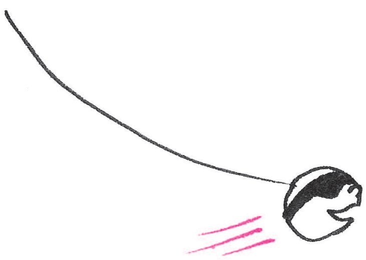
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2008

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html.



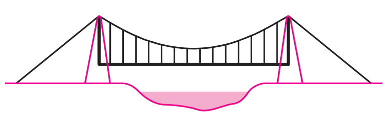
Zadania z fizyki nr 452, 453

Redaguje Jerzy B. BROJAN

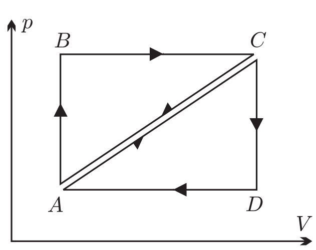
452. Mały ciężarek wisi na nici o długości l i kołysze się z amplitudą kątową α_0. Aby rozkołysać go mocniej, wprawiamy punkt zawieszenia w ruch harmoniczny o amplitudzie b i odpowiednio dobranej częstotliwości oraz fazie. Jaką maksymalną amplitudę kątową α_1 ciężarek może osiągnąć po czasie t? Wystarczy odpowiedź przybliżona, dla małej wartości b, a dużej (znacznie większej od okresu drgań) wartości t. Obie amplitudy wahań – początkowa α_0 i końcowa α_1 – są niewielkie.

Zadanie ma dwa warianty, w których punkt zawieszenia porusza się wzdłuż prostej: a) poziomej, b) pionowej. Rozwiązanie tylko wariantu a) będzie ocenione maksymalnie na 0,7, tylko wariantu b) – maksymalnie na 0,9, obu wariantów – oczywiście na 1.

453. Koc elektryczny zawiera dwa obwody oporowe i przełącznik mocy grzania o 4 pozycjach. Jeśli minimalna moc wynosi $P_1 = 50\,\mathrm{W}$, a maksymalna $P_4 = 300\,\mathrm{W}$, to jakie są wartości dwóch pośrednich wartości mocy?



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2007

Przypominamy treść zadań:

444. Most jest zawieszony na kablu (rys. 1). Znaleźć postać funkcji opisującej kształt kabla, jeśli ciężar mostu jest równo rozłożony wzdłuż osi poziomej, odstępy pomiędzy linami pionowymi są niewielkie, a ich ciężar oraz ciężar samego kabla można pominąć. Jeśli ciężar mostu jest równy P, długość l, a obniżenie środkowego punktu kabla względem najwyższych – h, to ile wynosi siła napięcia kabla w środku, a ile – w najwyższych punktach?

445. Na rysunku 2 przedstawiono dwa cykle termodynamiczne, w których przemianom podlega gaz doskonały. Cykle mają wspólny odcinek AC (choć przebiegany z przeciwnym zwrotem). Sprawność którego cyklu jest wyższa, czy też są one jednakowe? Rozważyć przypadki: a) $T_B = T_D$, b) $T_B > T_D$.

444. Składowa pozioma N_x siły napinającej kabel pozostaje stała na jego długości, natomiast składowa pionowa N_y równoważy ciężar odcinka mostu od środka (gdzie przyjmiemy $x = 0$) do danego punktu x – stąd $N_y = Px/l$. Niech kształt kabla będzie opisany funkcją $y(x)$, wtedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{N_y}{N_x} = \frac{P}{lN_x}x,$$

gdzie α jest kątem między styczną do kabla a poziomem. Całkując, otrzymujemy parabolę

$$y(x) = \frac{P}{2lN_x}x^2.$$

Z podstawienia $y(l/2) = h$ znajdujemy $N_x = \frac{Pl}{8h}$, a w najwyższych punktach siła napinająca wynosi

$$N = \sqrt{N_x^2 + (P/2)^2} = \frac{P}{2}\sqrt{1 + (l/4h)^2}.$$

445. Całkowita praca wykonana w dolnym i górnym cyklu jest równa polu odpowiedniego trójkąta – zatem jest jednakowa. Zgodnie z definicją

$$\eta = W_{\text{całk}}/Q_1$$

porównanie sprawności sprowadza się do porównania dostarczonych w danym cyklu ciepeł Q_1 – w górnym cyklu $Q_{g1} = Q_{AB} + Q_{BC}$, a w dolnym $Q_{d1} = Q_{AC}$. To ostatnie ciepło jest równe – z przeciwnym znakiem – ciepłu oddanemu chłodnicy przez górny cykl, $Q_{d1} = -Q_{g2}$. Jednak całkowite ciepło górnego cyklu $Q_{g1} + Q_{g2}$ jest dodatnie (gdyż w silniku ciepło ulega przekształceniu w pracę), stąd $Q_{g1} > Q_{d1}$. Wyższa jest więc sprawność dolnego cyklu, a wynik ten nie zależy od stosunku temperatur T_B i T_D.

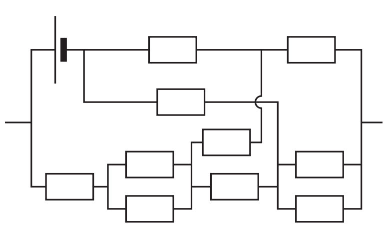
Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 441 zadaniach

Mateusz Łącki	– Kraków		42,38
Tomasz Wietecha	– Tarnów	5 -	40,50
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	7 -	40,22
Konrad Kapcia	– Częstochowa		38,99
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice		35,00
Jerzy Witkowski	– Radlin	1 -	31,82
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	2 -	24,58
Jacek Konieczny	– Poznań		19,16
Radosław Poleski	– Kołobrzeg		18,96
Ryszard Woźniak	– Kraków		11,64

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2005–2007 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (7), T. Wietecha (5), J. Łazuka, M. Wójcicki (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie):
„dwukrotni": J. Lipkowski, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;
„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Magiera, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach, J. Witkowski.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań **442** ($WT = 1{,}56$) i **443** ($WT = 3{,}31$) z numeru 9/2007

Tomasz Wietecha	– Tarnów	45,04
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	43,47
Konrad Kapcia	– Częstochowa	40,55
Jerzy Witkowski	– Radlin	31,82

Ponad 19 lat temu p. Tomasz Wietecha przysłał nam pierwsze rozwiązanie zadania z fizyki, a teraz wypełnił podwójną normę Weterana Klubu 44F – 6 razy 44 punkty (a oprócz tego 7 rund w Klubie 44M)! Życzymy jeszcze wielu lat satysfakcji z udziału w naszym konkursie!

Do rozwiązań zadań z ostatniego rocznika mamy kilka uzupełnień i uwag wynikających z nadesłanych listów.

Zadanie **422** [Odchylenie ciężarka wiszącego na sznurku pod wpływem wiatru] (współczynnik trudności $WT = 3{,}16$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). W treści zadania jednoznacznie podano, że siła wywierana przez wiatr jest proporcjonalna do długości odcinka sznurka. To dziwne, ale wszyscy rozwiązujący solidarnie zignorowali ten warunek, zastępując go założeniem o proporcjonalności siły do wartości pionowej składowej tego odcinka. Rozwiązywali więc faktycznie inne zadanie, co zostało ocenione na najwyżej 0,5. Wyższą ocenę (0,7) uzyskał tylko **M. Łupieżowiec**, który przynajmniej wprost napisał „zakładamy, że wychylenie układu jest niewielkie" – wtedy zanika różnica między oboma warunkami.

Zadanie **424** [Czy zachowanie pasażerów może wpłynąć na zużycie energii elektrycznej przez tramwaj] ($WT = 3{,}03$, $LPR = 1$). Biorąc pod uwagę intuicyjny charakter zadania (któż z nas nie jeździł nigdy tramwajem?), można by się spodziewać większej liczby prawidłowych rozwiązań. Za to praca **T. Wietechy** była więcej niż dobra, nasz Czytelnik obliczył nawet dodatkowe koszty obciążające przedsiębiorstwo komunikacyjne (chcą Państwo poznać tę sumę? otóż trzeba by 360 wyjątkowo złośliwych pasażerów, aby na trasie z 11 przystankami zwiększyć zużycie energii o 1 kWh, czyli 33 grosze!). Akcent samokrytyczny: w treści zadania nie podano istotnej informacji, czy tramwaj zwraca energię do sieci podczas hamowania. Jeśli nie zwraca, to rozwiązanie firmowe jest prawidłowe tylko w odniesieniu do fazy rozpędzania się tramwaju, a pobranie energii przez pasażerów podczas hamowania zmniejszy tylko ciepło wydzielane w hamulcach.

Zadanie **428** [Przebieg wskazań wagi, na której stoi obrócona klepsydra piaskowa] ($WT = 3{,}10$, $LPR = 0$). Tu również wyniki są słabe, np. żaden z naszych korespondentów nie zauważył, że całkowity pęd piasku pod koniec działania klepsydry jest równy początkowemu (równy zeru), a stąd średnie wskazanie wagi musi być równe ciężarowi klepsydry.

Zadanie **430** [Obserwacja planet pozasłonecznych metodą zasłonięcia gwiazdy] ($WT = 2{,}45$, $LPR = 3$). Do rozwiązania firmowego wkradła się pomyłka, polegająca na zaniżeniu o czynnik 2 podanej średnicy kątowej orbity planety. Prawidłowe rozwiązania: **K. Magiera**, **A. Idzik** i **R. Poleski**.

Zadanie **436** [Siła rozciągająca dwie części stacji orbitalnej] ($WT = 2{,}68$, $LPR = 2$). Częstym błędem naszych korespondentów było przyjęcie, że siła ta jest różnicą sił ciężkości działających na część bliższą i dalszą Ziemi, co dawało wynik zawyżony o 33% (i ocenę 0,5). Błędu tego uniknęli **K. Magiera** i **T. Choczewski**. W rozwiązaniu zamieszczonym w *Delcie* dał o sobie znać chochlik, który zmienił znak w jednym z równań (końcowy wynik jest poprawny).

Zadanie **437** [Z ogniw 1 V i oporników 1 Ω zbudować baterię o SEM = 0,8 V i $R_w = 0{,}75\ \Omega$] ($WT = 2{,}29$, $LPR = 5$). Obwód firmowy składał się z 15 elementów (2 ogniw i 13 oporników). Pan **Z. Galias** do rozwiązania zaprzągł odpowiedni program komputerowy, dzięki czemu zmniejszył liczbę elementów do 11, a także wykazał, że bardziej się jej zmniejszyć nie da. Obwód „komputerowy" przedstawiamy na marginesie.

No cóż, może niedokładnie taka była intencja prowadzącego tę rubrykę, ale skoro w dzisiejszych czasach komputery służą nawet do dowodzenia twierdzeń matematycznych, to trzeba pogratulować naszemu Czytelnikowi umiejętności programistycznych. Pozostałe dobre rozwiązania – **A. Idzik** (15 elementów, identyczne z firmowym), **K. Magiera** (17 elementów), **R. Woźniak** (17 elementów) i **A. Nowogrodzki** (24 elementy).

Zadanie **439** [Zastosowanie dawno wydobytego ołowiu] ($WT = 2{,}89$, $LPR = 3$). Słusznie odgadli **A. Idzik**, **K. Magiera** i **T. Wietecha**, że inspiracją do napisania tego zadania był artykuł w „Wiedzy i Życiu" *Astronomia i Rzymianie* (nr 8/2001). Jednak do uzyskania maksymalnej oceny za wskazanie źródła (wg p. 11 regulaminu) konieczne jest, żeby w nim znajdowało się **pełne** rozwiązanie. Otóż wątpliwość dotyczy kwestii pochodzenia domieszki promieniotwórczego izotopu Pb 210 w świeżo wydobytym ołowiu. Według artykułu „izotop Pb 210 powstaje, gdy ruda ołowiu jest bombardowana promieniowaniem pochodzącym z sąsiednich warstw skalnych". Konsultacje z fizykami, a także przegląd literatury naukowej sugerują, że autor się pomylił, a przyczyną jest raczej domieszka uranu w rudzie ołowiu. Izotop Pb 210 jest więc produktem rozpadu uranu U 238, a nie produktem reakcji wywołanej przez jakieś promieniowanie. Mamy nadzieję, że obniżenie ocen do 0,8 nie zostanie uznane przez Czytelników za pedanterię.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2008

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 543 (WT=1,93) i 544 (WT=1,66) z numeru 6/2007

Dariusz Kurpiel	– 2– 47,06
Witold Bednarek	– 3– 45,38
Krzysztof Kamiński	– 44,41
Marian Łupieżowiec	– 43,55
Andrzej Jóźwik	– 42,67
Paweł Najman	– 2– 41,89
Paweł Kubit	– 3– 41,03
Grzegorz Karpowicz	– 39,24
Marcin Kasperski	– 2– 36,86
Wojciech Maciak	– 35,69
Marek Prauza	– 3– 34,32
Jerzy Witkowski	– 4– 34,28
Marek Spychała	– 33,34
Krzysztof Dorobisz	– 1– 32,40
Tomasz Tkocz	– 31,27
Jerzy Cisło	– 5– 30,41
Franciszek S. Sikorski	– 29,73
Leszek Grzanka	– 29,14
Bartłomiej Dyda	– 4– 29,07
Jan Czardybon	– 27,82
Andrzej Idzik	– 25,46
Grzegorz Kozłowski	– 23,23
Łukasz Garncarek	– 1– 23,09
Janusz Olszewski	– 9– 23,03
Piotr Kumor	– 10– 20,13

Legenda (przykładowo): stan konta 10–20,13 oznacza, że uczestnik już dziesięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (jedenastej) rundzie ma 20,13 punktów.

Trzy osoby w tej kolejce przekroczyły próg 44; reprezentują trzy ligowe generacje: **Witold Bednarek** – najstarszy stażem uczestnik (start 1981); **Dariusz Kurpiel** – też uczestnik wieloletni (choć z długimi przerwami) zostaje kolejnym Weteranem; **Krzysztof Kamiński** – wchodzi do Klubu z numerem 106.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2005, 2006 lub 2007.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 555, 556

Redaguje Marcin E. KUCZMA

555. Niech n będzie liczbą parzystą. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną k o tej własności, że w każdym k-elementowym podzbiorze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ znajdują się liczby x, y (niekoniecznie różne), których suma albo różnica jest równa n.

556. Dana jest liczba rzeczywista $a > 0$ oraz liczba całkowita $n > 0$. Udowodnić, że największa możliwa wartość iloczynu $x_1 x_2 \ldots x_n$, którego czynniki x_i są liczbami naturalnymi spełniającymi warunek $x_1 + \ldots + x_n \leqslant a$, wynosi

$$\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor .$$

Zadanie 556 zaproponował pan Tomasz K.Kujawa z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2007

Przypominamy treść zadań:

547. Udowodnić nierówność $\left(\dfrac{x^{2/3}+y^{2/3}}{2}\right)^3 > \left(\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}-3\sqrt{y}}\right)^2$ dla liczb rzeczywistych $x > y > 0$.

548. Dla dodatnich liczb całkowitych a, b niech $M(a,b)$ oznacza liczbę par (x, y), których wyrazy x, y są dodatnimi liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, spełniającymi warunki $x \leqslant a$, $y \leqslant b$. Wykazać, że

$$M(a,b) = \sum_{r \geqslant 1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \mu(r),$$

gdzie μ jest funkcją Möbiusa, określoną wzorami

$$\mu(r) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } r = 1, \\ (-1)^k & \text{gdy } r \text{ jest iloczynem } k \text{ różnych czynników pierwszych,} \\ 0 & \text{gdy } r \text{ dzieli się przez kwadrat liczby pierwszej.} \end{cases}$$

547. Podstawienie $x = t^6 y$ sprowadza podaną nierówność do następującej:

$$\left(\frac{y^{2/3}(t^4+1)}{2}\right)^3 > \left(\frac{y(t^9-1)}{3(t^3-1)}\right)^2 \qquad \text{dla } y > 0, \ t > 1.$$

Zmienna y ulega redukcji i zostaje do udowodnienia nierówność

$$9\bigl(t^4+1\bigr)^3 > 8\bigl(t^6+t^3+1\bigr)^2 \qquad \text{dla } t > 1.$$

Rozwijamy wyrażenia potęgowe, przenosimy wszystko na jedną stronę i dostajemy wielomian, który okazuje się być podzielny przez $(t-1)^4$. Nierówność przybiera postać

$$\bigl(t-1\bigr)^4\bigl(t^8+4t^7+10t^6+4t^5-2t^4+4t^3+10t^2+4t+1\bigr) > 0.$$

Dla $t > 1$ jest ona spełniona, bo czynnik w ostatnim nawiasie ma wartości większe niż $t^8 - 2t^4 + 1$, czyli $(t^4-1)^2$.

548. Niech P będzie zbiorem wszystkich liczb pierwszych nie większych od żadnej z liczb a, b. Dla każdej liczby $p \in P$ rozważamy zbiór A_p złożony z punktów kratowych (x, y) $(x \leqslant a,\ y \leqslant b)$ o obu współrzędnych podzielnych przez p. Wielkość $M(a,b)$ wyraża liczbę tych punktów (x, y) pełnego prostokąta kratowego $x \leqslant a$, $y \leqslant b$, które nie należą do żadnego ze zbiorów A_p. Zgodnie z regułą włączeń i wyłączeń,

$$M(a,b) = ab - c_1 + c_2 - c_3 + \ldots + (-1)^{|P|} c_{|P|}\,,$$

gdzie $c_1 = \sum_{p \in P} |A_p|$, $c_2 = \sum_{p<q} |A_p \cap A_q|$, i ogólnie

$$c_k = \sum_{p_1 < \ldots < p_k} |A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k}| \qquad (p_1, \ldots, p_k \in P).$$

Każdy wybór liczb $p_1 < \ldots < p_k$ ze zbioru P można utożsamiać z liczbą bezkwadratową $r = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$; różnym wyborom (p_i) odpowiadają różne liczby r.

Zbiór $A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k}$ składa się z dokładnie tych punktów kratowych (x, y) $(x \leqslant a$, $y \leqslant b)$, w których x oraz y są podzielne przez iloczyn $r = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. W prostokącie $x \leqslant a$, $y \leqslant b$ jest $\lfloor a/r \rfloor \cdot \lfloor b/r \rfloor$ takich punktów.

Oznaczając przez C_k zbiór tych liczb naturalnych, które są iloczynami k różnych czynników pierwszych ze zbioru P, przepisujemy uzyskaną wcześniej równość jako

$$M(a,b) = ab - \sum_{r \in C_1} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor + \sum_{r \in C_2} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor - \ldots + (-1)^{|P|} \sum_{r \in C_{|P|}} \left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor .$$

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza, P. Kumor (10), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (9), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (7), T. Józefczyk, J. Witkowski (4), W. Bednorz, B. Dyda (4), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit, J. Cisło (5), W. Bednarek(4), D. Kurpiel (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, M. Kieza, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, P. Najman, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, K. Dorobisz, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, K. Kamiński, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Woryna, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Prawa strona przedstawia sumę

$$\sum_{r\in E}\left\lfloor\frac{a}{r}\right\rfloor\left\lfloor\frac{b}{r}\right\rfloor\mu(r),$$

w której r przebiega zbiór $E=\{1\}\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_{|P|}$.

Sumowanie po wszystkich liczbach całkowitych $r\geqslant 1$ da tę samą wartość sumy, bowiem każda liczba $r\notin E$ ma czynnik pierwszy $p'\notin P$ lub nie jest bezkwadratowa. W pierwszym przypadku $r>\min\{a,b\}$, więc $\lfloor a/r\rfloor\lfloor b/r\rfloor=0$, a w drugim $\mu(r)=0$. Otrzymaliśmy zatem równość podaną w tezie zadania.

Karta żałobna: zginął **Przemek Gadziński**. Student, a następnie doktorant Uniwersytetu Wrocławskiego (specjalność: analiza harmoniczna; gotowa praca doktorska). Wcześniej uczestnik Olimpiady Matematycznej i Zawodów Polsko-Austriackich – z tego okresu dobrze zapamiętany przez redaktora ligi zadaniowej jako świetnie zapowiadający się matematyk, przy tym bardzo miły chłopak, skromny i wszystkim życzliwy. W naszej lidze – laureat siedmiokrotny. Nie zdążył wyjść na pozycję lidera, bo przedwcześnie tragicznie zakończył życie. Stało się to parę lat temu, ale dopiero niedawno smutna wiadomość do nas dotarła.

Gdy ktoś któregoś dnia spartaczy robotę, mówi się, że miał zły dzień. Prowadzący ligę zadaniową miał chyba zły rok. Uczestnicy ligi zapewne nie mogli się nadziwić, czytając firmowe rozwiązania zadań, dlaczego są one tak wymyślne. Ano, właśnie dlatego, że redaktor dopiero z prac uczestników dowiadywał się, jak te zadania należało fachowo robić. Dotyczy to zwłaszcza dwóch zadań (**525**, **532**), znacznie prostszych, niż by to mogło wyglądać z lektury opracowań firmowych.

Zawszeć to krzepiące, gdy mamy okazję czegoś się nauczyć od naszych Czytelników. I wszystko jest dobrze, dopóki zadania i nasze rozwiązania są, choćby niezdarne, ale przynajmniej poprawne.

Zdarza się jednak, że zadanie każe udowodnić fałszywe twierdzenie; taka sytuacja miała już w lidze raz czy drugi miejsce. No i teraz znów się powtórzyła (**542**). Ciekawe, że tylko jedna osoba wyraźnie stwierdziła fałsz i podała kontrprzykład. Rzecz jasna, otrzymała ocenę maksymalną.

Pozostałe prace jednak wcale nie zostały ocenione na zero – mimo że podawały „dowód" nieprawdziwej tezy (jak w rozwiązaniu firmowym...). Bo ta teza „normalnie" jest słuszna, poza bardzo wyjątkowymi przypadkami (matematycy mówią: *generycznie*). Istotą matematycznej zawartości zadania, zgodną z intencją jego autora, było właśnie to, co się dzieje przy konfiguracji generycznej.

Redaktor ligi zawinił niestarannością. Powinien był uważniej sformułować treść, dołączając jakiekolwiek założenie, eliminujące owe patologiczne przypadki. I może nie chciał zbyt surowo oceniać tych, którzy takie założenie podświadomie przyjęli i przy tym założeniu coś sensownie udowodnili.

Zadanie **525.** [Układ równań $a=c^2+d^2$, $b=d^2+e^2$, $c=e^2+a^2$, $d=a^2+b^2$, $e=b^2+c^2$] (współczynnik trudności WT=2,24; liczba poprawnych rozwiązań LPR=14). To właśnie pierwsze ze wspomnianych wyżej zadań. Kilku uczestników robi to tak, jak w rozwiązaniu firmowym lub dość podobnie. Niewiele dobrego można o takim rozwiązaniu powiedzieć – poprawne, i tyle. A jak naprawdę należało atakować ten układ równań? Tak, jak to pokazali (różniąc się nieco w szczegółach) **W. Bednarek**, **J. Cisło**, **K. Dorobisz**, **B. Dyda**, **T. Kujawa**, **P. Kumor**, **J. Olszewski**, **M. Spychała**, **T. Warszawski**:

Dodajemy stronami równanie pierwsze i trzecie i odejmujemy drugie – dostajemy równanie $\frac{1}{2}-b=(a-\frac{1}{2})^2+(c-\frac{1}{2})^2$; jeśli więc (a,b,c,d,e) jest rozwiązaniem, to $b\leqslant\frac{1}{2}$ i przez cykliczność wszystkie niewiadome leżą w przedziale $\langle 0;\frac{1}{2}\rangle$; teraz dodając wszystkie równania stwierdzamy, że suma pięciu liczb nieujemnych $a(1-2a),\ldots,e(1-2e)$ jest zerowa – dokończenie oczywiste.

Zadanie **530.** [$\triangle ABC$ (ostrokątny); H – ortocentrum; AP, AQ – styczne do okręgu $(BCQP)$ o średnicy BC $\Rightarrow$ punkty P,Q,H współliniowe] (WT=1,77; LPR=11). Zadanie było prościutkie, rozwiązanie firmowe też. Ale można było jeszcze krócej: wystarczyło zauważyć, że wysokości BE i CF są przekątnymi czworokąta $BCEF$ wpisanego w rozważany okrąg i powołać się na znany fakt, że ich punkt przecięcia (czyli H) leży na prostej biegunowej punktu A względem owego okręgu (czyli prostej PQ); tak przedstawili swe rozwiązania **M. Jastrzębski**, **P. Kumor**, **P. Łabędzki**.

Dowody, jak w rozwiązaniu firmowym, lub niezbyt istotnie się od niego różniące, podali **J. Cisło**, **J. Olszewski** oraz **K. Dorobisz**, **T. Warszawski** – ostatni dwaj nieco skrócili zapis, używając pojęcia potęgi punktu względem okręgu. Ponadto czterej uczestnicy znaleźli rozwiązania analityczne.

Zadanie **531.** [Graf (n,q) bez cyklu długości 3, ale nie dwudzielny $\Rightarrow$ $4q \leqslant n^2 - 2n + 5$] ($WT$=3,28; LPR=6). W omawianym sezonie było to najtrudniejsze zadanie. Wszystkie rozwiązania jak firmowe: **J. Cisło**, **K. Dorobisz**, **Ł. Garncarek**, **P. Kumor**, **J. Olszewski**, **T. Warszawski**.

Zadanie **532.**
[Ciąg (a_n): $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{n+1}{n-1}(a_1 + \ldots + a_{n-1})$; wzór jawny: $a_n = ?$] (WT=1,23; LPR=24). Znów: rozwiązanie firmowe niepotrzebnie skomplikowane. Wszyscy uczestnicy robią to znacznie prościej – ot tak: ciąg (s_n) o wyrazach $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ spełnia warunki $s_1 = 1$ oraz

$$s_n - s_{n-1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot s_{n-1},$$

czyli

$$\frac{s_n}{n} = 2 \cdot \frac{s_{n-1}}{n-1}.$$

Stąd $s_n/n = 2^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$, więc

$$a_n = \frac{n+1}{n-1} \cdot s_{n-1} = (n+1)2^{n-2},$$

i gotowe.

Zadanie **537.** [a, b, c – boki trójkąta; $A = \dfrac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}}$; B, C – analogicznie $\Rightarrow$ $A + B + C \leqslant 3$] (WT=2,42; LPR=8).

Oznaczając mianowniki wyrażeń definiujących A, B, C kolejno przez x, y, z mamy, jak w rozwiązaniu firmowym,

$$A^2 = \frac{x^2 + xy + xz - yz}{2x^2} \qquad (B^2, C^2 \text{ – analogicznie}).$$

W tym momencie większość uczestników zauważa, że w myśl nierówności Cauchy'ego–Schwarza [$(A+B+C)^2 \leqslant 3(A^2+B^2+C^2)$] wystarczy wykazać mocniejszą tezę $A^2 + B^2 + C^2 \leqslant 3$. W zmiennych x, y, z można tę tezę zapisać na przykład tak:

$$\frac{x^2 - xy - zx + yz}{x^2} + \frac{y^2 - yz - xy + zx}{y^2} + \frac{z^2 - zx - yz + xy}{z^2} \geqslant 0.$$

W. Bednarek, **K. Dorobisz**, **A. Idzik**, **M. Jastrzębski**, **J. Olszewski**, **T. Warszawski**, **T. Wietecha** różnymi przekształceniami dowodzą słuszności tak wzmocnionej tezy. Warto jednak nadmienić, że dowód nie jest tu w ogóle potrzebny – jest to bowiem szczególny przypadek ($\lambda = -2$) klasycznej nierówności

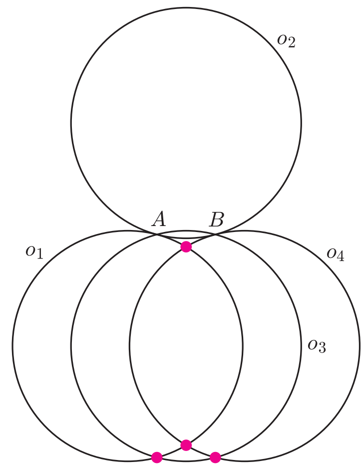
$$x^\lambda(x-y)(x-z) + y^\lambda(y-z)(y-x) + z^\lambda(z-x)(z-y) \geqslant 0,$$

słusznej dla wszystkich $\lambda \in \mathbf{R}$ oraz $x, y, z > 0$ i znanej pod nazwą *nierówności Schura* (choć niekiedy ta nazwa bywa zawężana tylko do sytuacji, gdy $\lambda \geqslant 0$); jedynie ostatni z wymienionych uczestników powołał się na nierówność Schura, ale dopiero po dalszym podstawieniu i przekształceniu.

Natomiast oszacowania z rozwiązania firmowego ($A + B \leqslant 2$, $C \leqslant 1$, przy założeniu $x \leqslant y \leqslant z$) uzyskał **P. Kumor** oraz **J. Olszewski** (drugie rozwiązanie!)

Zadanie **539.** [$T_1, \ldots, T_m \subset X$; $|X| = n$; $\forall i\colon |T_i| = 3$; $\forall (i<j)\colon |T_i \cap T_j| \leqslant 1$ $\Rightarrow$ $\exists S \subset X$, $|S| \geqslant \lfloor\sqrt{2n}\rfloor$; $\forall i\colon |S \cap T_i| \leqslant 2$] ($WT$=3,10; LPR=6). Z tym zadaniem poradzili sobie **J. Cisło**, **K. Dorobisz**, **M. Jastrzębski**, **K. Kamiński**, **M. Kieza**, **J. Olszewski** – rozwiązania identyczne z firmowym.

Zadanie **542.** [Przystające okręgi o_1, o_2, o_3, o_4 (o różnych środkach); o_1, o_2, o_3 mają punkt wspólny A; o_2, o_3, o_4 mają punkt wspólny B ($\neq A$) $\Rightarrow$ punkty przecięcia tych okręgów, różne od A, B, są wierzchołkami równoległoboku] (WT=2,43; LPR=1? 2?).



Otóż właśnie – kontrprzykład na rysunku: o_2, o_3 przecinają się w blisko położonych punktach A i B, które są jednocześnie punktami styczności okręgu o_2 z okręgami o_1 i o_4. Cztery pozostałe „punkty przecięcia tych okręgów" nie są wierzchołkami czworokąta wypukłego! Ten przykład podała **Ewa Bieniecka** – jedyna osoba, która jasno stwierdziła, że teza jest fałszywa (a następnie przeprowadziła analizę domniemanych wariantów zamierzonej treści).

Bo treść zadania była w ogóle niejasna. Liczba „pozostałych punktów przecięcia" może być zarówno większa, jak i mniejsza od 4 (tę kwestię wyeksponował i częściowo przedyskutował w swoim rozwiązaniu **K. Dorobisz**) – wówczas można próbować różnych interpretacji sensu zadania. Ale we wskazanym przykładzie akurat nie ma wątpliwości: poza A, B są dokładnie cztery punkty przecięcia i nie spełniają tezy.

O co więc naprawdę chodziło w zadaniu? Jeśli (jak w rozwiązaniu firmowym) $o_1 \cap o_2 = \{A, K\}$, $o_2 \cap o_4 = \{B, L\}$, $o_4 \cap o_3 = \{B, M\}$, $o_3 \cap o_1 = \{A, N\}$, to istotnie $KLMN$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym do odcinka). Jednak, po pierwsze – treść zadania powinna była wykluczyć ewentualne punkty przecięcia okręgów o_1 i o_4; a po drugie – gdy o_1, o_2 są styczne, wówczas $K = A$, gdy zaś o_4, o_2 są styczne, wówczas $L = B$; nadal K, L, M, N są wierzchołkami równoległoboku, tyle że nie są to już teraz punkty „różne od A, B" – to niefortunne wyrażenie powinno było zostać zastąpione jakimś innym, lepiej przemyślanym.

Wszyscy rozwiązujący widzieli pierwszą z tych usterek i wyraźnie pisali, które cztery punkty biorą pod uwagę. Ale formalne załamanie tezy w przypadku połączenia obu usterek zostało dostrzeżone tylko przez panią Ewę.