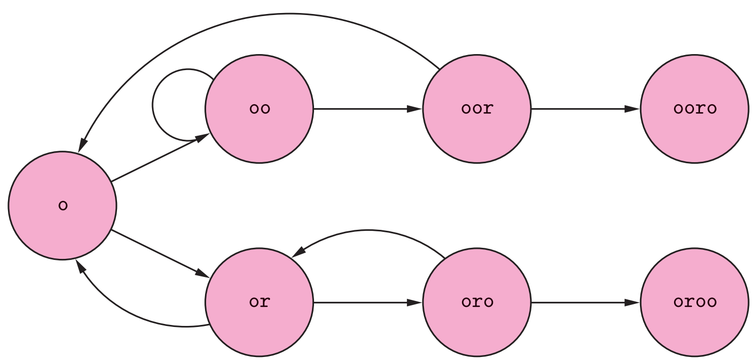
Gra Penneya

Andrzej WALAT

W 1969 roku Walter Penney wymyślił zabawną grę. Alicja i Bill wybierają dwa słowa utworzone z liter `o` i `r` symbolizujących dwa wyniki rzutu monetą: orzeł i reszka. Na przykład Alicja wybiera słowo `ooro`, a Bill `oroo`. Będą rzucali monetę tak długo, aż wypadnie jedno z ich słów. Jeśli będzie to słowo Alicji (w naszym przykładzie `ooro`), wygrywa Alicja, a w przeciwnym przypadku wygrywa Bill.

Gra Penneya ma szereg zaskakujących właściwości. W naszym przykładzie większe szanse ma Alicja, bo słowo `ooro` wygrywa ze słowem `oroo` w stosunku $3:2$. Z kolei słowo `oroo` wygrywa ze słowem `rooo` w stosunku $7:5$. Mogłoby się wydawać, że słowo `ooro` powinno być dużo lepsze niż `rooo`, ale to nieprawda. Słowo `rooo` wygrywa z `ooro` w stosunku $7:5$. Skąd to wiemy? Piękne rozwiązanie problemu, jak obliczać szanse Alicji i Billa w grze Penneya, wymyślił John Horton Conway. Opis rozwiązania Conwaya można znaleźć w podręczniku Grahama, Knutha i Patashnika *Matematyka konkretna*, którą gorąco polecam. Ale piękno matematyki polega między innymi na tym, że większość interesujących zadań ma wiele, często bardzo różnych, rozwiązań. Ambitny Czytelnik, nawet jeśli nie jest Johnem Conwayem, może spróbować odkryć jakieś własne ciekawe rozwiązanie problemu Penneya. Dla zachęty przedstawiam poniżej jedną propozycję.

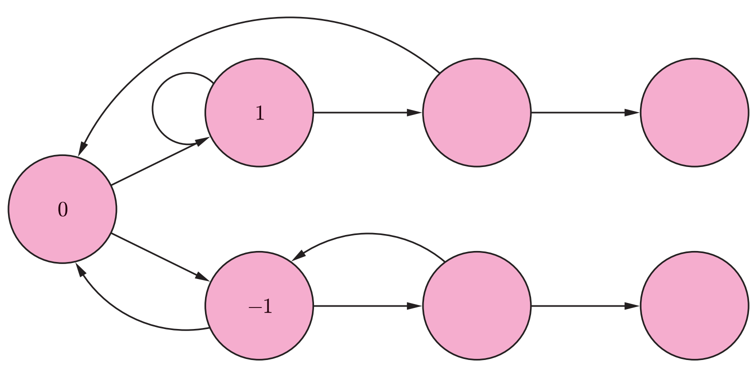
Krok 1. Rysuję graf gry:



Rys. 1

W naszym przykładzie przyjmujemy, że gra zaczyna się naprawdę w momencie wyrzucenia pierwszego orła. Każdy stan gry odpowiada jakiemuś prefiksowi słowa Alicji lub słowa Billa. Tworzą one dwie ścieżki prowadzące do dwóch stanów końcowych: wygranej Alicji lub Billa.

Krok 2. W polu początkowym wpisuję liczbę 0, a w dwóch następnych polach odpowiednio na ścieżce Alicji oraz Billa wpisuję liczby 1 oraz -1.



Rys. 2

Liczba 0 w polu początkowym jest średnią arytmetyczną dwóch liczb, 1 i -1, na polach, do których prowadzą strzałki od pola początkowego.

Rozwiązanie zadania F 710.
Ciśnienie w stygnącej bańce maleje, i w związku z tym rośnie siła potrzebna do oderwania bańki od pleców. Przypuśćmy, że temperatura i ciśnienie w gorącej bańce wynoszą T_1 oraz p_1, a w wystudzonej T_2 i p_2; wtedy

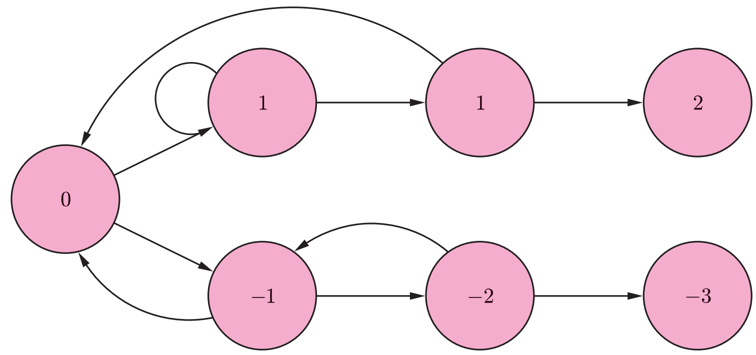
$$F \approx (p_1 - p_2)S.$$

Masa i objętość powietrza w bańce można uznać za stałe, zatem $p_1/T_1 = p_2/T_2$, stąd

$$F \approx p_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)S = p_1 S\frac{\Delta T}{T}.$$

Niech $\Delta T = 100$ K, $T_1 = 400$ K, $S = 10\ \mathrm{cm}^2$, $p_1 = 10^5$ Pa, wtedy $F \approx 25$ N.

Krok 3. Wpisuję liczby na kolejnych polach odpowiednio na ścieżce Alicji oraz ścieżce Billa zgodnie z zasadą średniej arytmetycznej: Jeśli dwie strzałki z pola p prowadzą do pól r i s, to liczba w polu p musi być średnią arytmetyczną liczb w polach r i s.

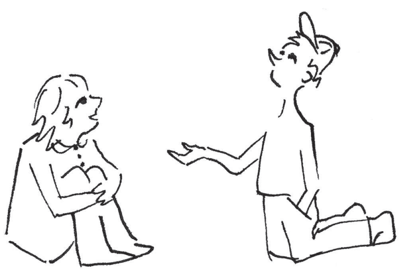


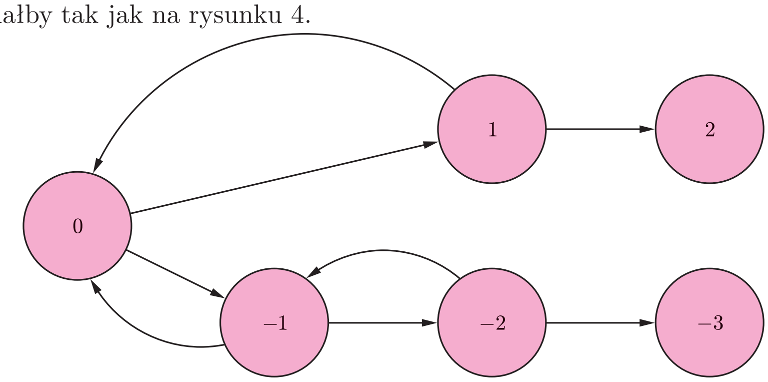
Rys. 3

Szanse Alicji w pojedynku z Billem są jak 3 : 2 lub inaczej: prawdopodobieństwo sukcesu Alicji, która wybrała słowo `ooro`, w pojedynku z Billem, który wybrał słowo `oroo`, wynosi:

$$p_A = \frac{3}{2-(-3)} = 0{,}6.$$

Uwaga. Rachunki trochę się upraszczają, jeśli w grafie gry, takim jak na rysunku 1, usuniemy stany z pętelką, przekierowując odpowiednio prowadzące do nich strzałki do kolejnego stanu. W naszym przykładzie końcowy graf wyglądałby tak jak na rysunku 4.





Rys. 4

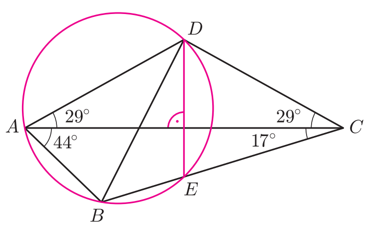
Skąd to wiemy? Graf na rysunku 4 przedstawia jeden z przypadków zadania o ruinie gracza. W ogólnym przypadku zakładamy, że gracz przystępując do hazardowej gry, ma p zł. W każdym kroku gry stawia określoną stawkę, np. 1 zł, i może ją z jednakowym prawdopodobieństwem podwoić lub stracić. To znaczy stan jego posiadania może się zwiększyć lub zmaleć o daną stawkę. Zakończy grę sukcesem w momencie, gdy uzyska s zł albo klęską, gdy stan jego posiadania spadnie do k zł. Zakładamy, że $k < p < s$ (ale może być $k < 0$, tzn. gracz może zakończyć grę na minusie). Wiadomo, że prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{p-k}{s-k}$, w naszym przykładzie $\frac{0-(-3)}{2-(-3)} = \frac{3}{5}$.

Dowód tego faktu można znaleźć w wielu podręcznikach akademickich z rachunku prawdopodobieństwa. Zwykle są one bardzo formalne, ale istnieje również dowód elementarny.

Ambitnych Czytelników zachęcam do obliczenia szans słowa `oroo` w pojedynku z `rooo` oraz słowa `rooo` w pojedynku z `ooro`.

Komentarz. Opis rozwiązania przedstawiony na przykładzie może wydawać się nie dość precyzyjny i ogólny. Zgodnie z systemem wartości przyjętym w informatyce rozwiązanie jest kompletne dopiero wtedy, gdy istnieje sprawdzony program będący implementacją wybranej idei algorytmicznej. Taki kompletny program napisany w Logo można znaleźć w aneksie na stronie WWW *Delty*.

Rozwiązanie zadania M 1196.
Przez punkt D prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AC, która przecina prostą BC w punkcie E.



Wówczas

$$\sphericalangle DEC = 90^\circ - \sphericalangle ACE = 73^\circ = \sphericalangle DAB,$$

skąd wynika, że punkty A, B, E, D leżą na jednym okręgu. Zatem

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED = \sphericalangle CED = 73^\circ.$$