Artykuł został napisany z inspiracji Andrzeja Mąkowskiego.

Twierdzenie o czterech wierzchołkach

Jerzy KONARSKI[*]

Rozważmy gładką zamkniętą krzywą płaską C bez samoprzecięć. Wiadomo, że krzywa taka dzieli płaszczyznę na dwa obszary: ograniczony i nieograniczony (twierdzenie **Artura Schoenfliesa**). Wyobraźmy sobie punkt poruszający się po tej krzywej ze stałą szybkością skalarną równą jednostce długości w jednostce czasu w ten sposób, że obszar ograniczony leży po lewej stronie. Położenie $r(t) = (x(t), y(t))$ punktu w chwili t jest opisane okresową funkcją gładką $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Funkcję r będziemy nazywać *unormowaną* i *zorientowaną parametryzacją krzywej* C. Okresem podstawowym jest długość (obwód) krzywej C. Z założenia o stałej szybkości wynika, że $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$, a więc wektor prędkości można zapisać w postaci

Taka funkcja r nazywana jest także *funkcją wektorową* z tego względu, że można na nią patrzeć jak na parę zwykłych funkcji $x(t)$ i $y(t)$, opisujących, odpowiednio, pierwszą i drugą współrzędną punktów krzywej.

Jeśli obie te funkcje mają drugą pochodną i jeśli te pochodne są funkcjami ciągłymi, to funkcję r (i opisywaną przez nią krzywą) nazywamy *gładką*.

$$r'(t) = [x'(t), y'(t)] = [\cos\varphi(t), \sin\varphi(t)], \tag{1}$$

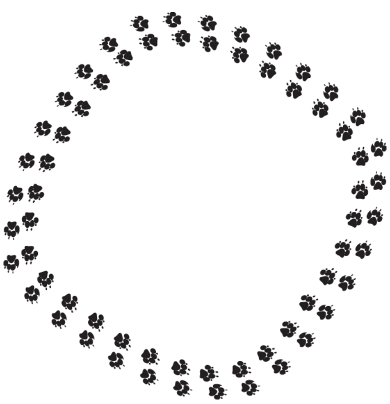
dla pewnej funkcji gładkiej φ. Wartość $\varphi(t)$ to kąt pomiędzy dodatnią półosią pierwszej osi układu współrzędnych a wektorem prędkości punktu w chwili t, mierzony odwrotnie do ruchu wskazówek zegara. Różniczkując równość (1), otrzymujemy

$$r''(t) = \varphi'(t)[-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t)]. \tag{2}$$

Oznaczając $k(t) = \varphi'(t)$, możemy to zapisać w postaci tzw. wzorów Fréneta

$$\begin{cases} x''(t) = -k(t)y'(t) \\ y''(t) = k(t)x'(t) \end{cases}. \tag{3}$$

Wynika z nich, po pierwsze, że wektor przyspieszenia $r''(t)$ jest prostopadły do wektora prędkości, co jest zgodne z intuicją: skoro punkt ma stałą szybkość (skalarną), to nie przyspiesza w kierunku ruchu – zatem „całe przyspieszenie" dokonuje się w kierunku prostopadłym do ruchu.



Po drugie, widzimy, że wielkość (długość wektora) przyspieszenia w chwili t jest równa co do modułu liczbie $k(t)$. Liczbę $k(t)$ nazywa się *krzywizną zorientowaną* parametryzacji r krzywej C w punkcie $r(t)$. Znak krzywizny zorientowanej jest dodatni, jeśli poruszający się punkt skręca w lewo, a ujemny, jeśli skręca w prawo. Można udowodnić, że zamknięta krzywa płaska bez samoprzecięć ogranicza zbiór wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy krzywizna zorientowana jej parametryzacji unormowanej ma stały znak. Przykładem krzywej zamkniętej jest elipsa. Jeśli obiegamy ją w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara, krzywizna zorientowana jest stale dodatnia (elipsa ogranicza zbiór wypukły) i na przemian maleje i rośnie, przyjmując wartości ekstremalne w wierzchołkach elipsy. Wzorując się na elipsie, *wierzchołkami* dowolnej *płaskiej krzywej zamkniętej* nazywamy te jej punkty, w których krzywizna zorientowana osiąga ekstrema lokalne.

Prawie dokładnie 100 lat temu (praca ukazała się w roku 1909) bengalski matematyk **Syamadas Mukhopadhyaya** udowodnił następujące twierdzenie, będące jednym z pierwszych rezultatów dotyczących globalnych własności krzywych.

Twierdzenie o czterech wierzchołkach. *Każda gładka płaska krzywa zamknięta C, ograniczająca podzbiór wypukły, ma co najmniej cztery wierzchołki.*

Podamy dwa dowody tego twierdzenia: pierwszy – bardziej formalny, bardziej rachunkowy, drugi – bardziej intuicyjny, bardziej geometryczny.

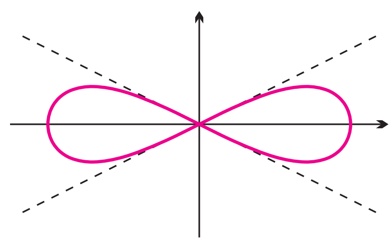
Oto dowód **Gustava Herglotza**. Niech r będzie parametryzacją unormowaną C, $k(t)$ jej krzywizną zorientowaną i niech d oznacza długość krzywej C. Funkcje r i k są określone na całej osi liczbowej, ale ze względu na ich okresowość wystarczy je rozpatrywać na dowolnym przedziale długości d, np. na $[0, d]$. Jeśli k jest stała, to teza, oczywiście, zachodzi, bo każdy punkt C jest wierzchołkiem, załóżmy zatem, że k nie jest stała. Z ciągłości k i zwartości przedziału $[0, d]$ wynika, że k osiąga wartość najmniejszą i wartość największą. Bez straty ogólności możemy założyć, że wartością najmniejszą jest $k(0)$,

[*]Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

a wartością największą $k(e)$ dla pewnej liczby $e \in [0, d]$ (w razie potrzeby należy złożyć r z odpowiednim przesunięciem na osi liczbowej). Przypuśćmy, że C ma tylko dwa wierzchołki. Wtedy pochodna krzywizny zorientowanej jest dodatnia na przedziale $(0, e)$ i ujemna na (e, d). Oznaczmy przez L prostą łączącą punkty $r(0)$, $r(e) \in C$. Prosta ta ma równanie postaci $ax + by + c = 0$, dla pewnych liczb a, b, c. Przypomnijmy, że wtedy wartość wyrażenia $ax + by + c$ jest dodatnia po jednej stronie prostej L, a ujemna po drugiej, zatem iloczyn $(ax(t) + by(t) + c)k'(t)$ ma stały znak na $(0, d)$, bo w e oba czynniki zmieniają znak (i tylko tam – korzystamy z wypukłości). Zatem całka $\int_0^d (ax(t) + by(t) + c)k'(t)\mathrm{d}t$ jest różna od zera. Tymczasem, całkując przez części, otrzymujemy

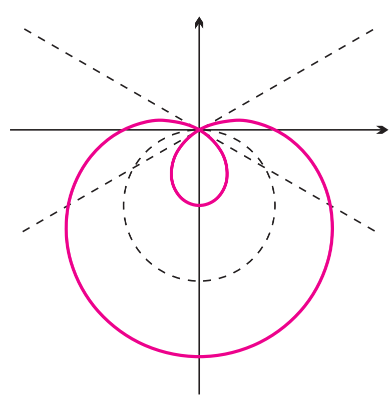
$$\int_0^d (ax(t) + by(t) + c)k'(t)\mathrm{d}t =$$
$$= (ax(t) + by(t) + c)k(t)|_0^d - \int_0^d (ax'(t) + by'(t))k(t)\mathrm{d}t =$$
$$= -\int_0^d (ay''(t) - bx''(t))\mathrm{d}t = (-ay'(t) + bx'(t))|_0^d = 0.$$

Korzystaliśmy tu z okresowości funkcji $x(t), y(t)$ i $k(t)$ oraz ze wzorów Fréneta (3). Otrzymana sprzeczność dowodzi, że krzywa C ma więcej niż dwa wierzchołki. Ponieważ C ma parzystą liczbę wierzchołków (kolejne maksima są rozdzielone minimami), to musi ich mieć co najmniej cztery.



Rys. 1. Proste $x = 2y$ i $x = -2y$ są styczne do krzywej w punkcie (0, 0). Krzywa w tym punkcie przechodzi z jednej strony stycznej na drugą, co powoduje, że krzywizna zorientowana zmienia znak. Ekstrema leżą na poziomej osi, mają różne znaki i tę samą wartość bezwzględną.

Dla Czytelników nieznających (lub nielubiących) całek podajemy szkic innego dowodu, autorstwa Amerykanina **Roberta Ossermana**. Oparty jest on na następującej charakteryzacji krzywizny. Z każdym punktem p krzywej C jest związany tzw. *okrąg ściśle styczny*. Jest to ten z okręgów stycznych do C w punkcie p, dla którego parametryzacji unormowanej wektor przyspieszenia w p jest równy wektorowi przyspieszenia parametryzacji unormowanej krzywej C w punkcie p. Okrąg ten najlepiej przybliża krzywą C w otoczeniu punktu p. Otóż, krzywizna krzywej C w p jest równa krzywiźnie okręgu ściśle stycznego w p, czyli odwrotności jego promienia. Dla dowodu twierdzenia rozpatrzmy okrąg O opisany na krzywej C, czyli taki okrąg, że C leży w kole ograniczonym przez ten okrąg, i który ponadto ma jeszcze możliwie najmniejszy promień. Taki okrąg istnieje i jest styczny do C w co najmniej dwóch punktach, przy czym łuk pomiędzy dwoma kolejnymi punktami styczności nie może być dłuższy od połowy długości okręgu. Oznaczmy promień okręgu O przez R. Jeśli O ma cały łuk wspólny z krzywą C, to punkty tego łuku są wierzchołkami C i teza twierdzenia zachodzi, załóżmy zatem, że takiego łuku nie ma. W punktach styczności krzywizna zorientowana krzywej C jest większa od $1/R$, bo krzywa w otoczeniu każdego takiego punktu leży wewnątrz okręgu O. Pomiędzy kolejnymi punktami styczności na C można znaleźć punkt, w którym krzywizna jest mniejsza od $1/R$. Stąd już wynika, że krzywizna zorientowana w co najmniej dwóch punktach ma maksima lokalne i w co najmniej dwóch punktach ma minima lokalne.



Rys. 2. Ta krzywa to szczególny przypadek *ślimaka Pascala*, który należy do jeszcze szerszej klasy *konchoid okręgu*. W tym przypadku punkty wspólne krzywej z prostymi przechodzącymi przez punkt (0, 0) leżą w odległości 1 od przecięcia tych prostych z okręgiem zaznaczonym linią przerywaną. Proste $x = \sqrt{3}y$ i $x = -\sqrt{3}y$ są styczne do krzywej. Ekstrema krzywizny leżą na osi pionowej.

Przypominamy, że gdy we wzorze (4) dla pewnej wartości φ liczba r jest ujemna, należy odłożyć jej bezwzględną wartość po przeciwnej stronie punktu (0, 0).

Założenie o wypukłości nie jest konieczne, jeśli krzywa C nie ma samoprzecięć. Udowodnił to po raz pierwszy niemiecki matematyk **Adolf Kneser** w roku 1912. Dowód Ossermana także obejmuje ten przypadek.

Z założenia o braku samoprzecięć nie można zrezygnować, jak pokazuje przykład ósemki z rysunku 1 o parametryzacji

$$r(t) = \left(\sin t, \frac{1}{4}\sin 2t\right),$$

a dla krzywych o krzywiźnie stałego znaku przykład krzywej z rysunku 2, opisanej we współrzędnych biegunowych wzorem

$$r = 1 - 2\sin\varphi. \tag{4}$$

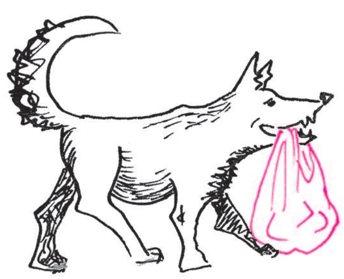
W obu przypadkach krzywizna zorientowana ma tylko dwa ekstrema.

Nie można również zrezygnować z założenia o płaskości. Zanim przejdziemy do przykładu, trzeba jednak wspomnieć, że dla krzywych przestrzennych krzywizna zorientowana nie ma sensu. Zamiast niej określa się krzywiznę jako długość wektora przyspieszenia, czyli drugiej pochodnej parametryzacji unormowanej. Dla krzywych płaskich w ten sposób określona krzywizna jest równa wartości bezwzględnej krzywizny zorientowanej. Aby otrzymać przykład zamkniętej krzywej przestrzennej, której krzywizna ma dwa ekstrema lokalne, wystarczy potraktować wspomnianą przed chwilą krzywą (4) jako zawartą w płaszczyźnie opisanej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ równaniem $z = 0$, a następnie rozsunąć jej dwie gałęzie w punkcie $(0, 0)$ „unosząc” jedną z nich nieznacznie do góry i „opuszczając” drugą w dół. Krzywizna prawie się przy tym nie zmieni i pozostaną tylko dwa wierzchołki.

Okazuje się, że prawdziwe jest następujące twierdzenie odwrotne do twierdzenia o czterech wierzchołkach, udowodnione w 1997 r. przez Szweda **Björna Dahlberga**.

Twierdzenie. *Dowolna funkcja ciągła $k : S^1 \to \mathbb{R}$, mająca co najmniej dwa minima lokalne i co najmniej dwa maksima lokalne, jest funkcją krzywizny zorientowanej pewnej płaskiej krzywej zamkniętej bez samoprzecięć.*

Pomimo że od ukazania się pracy Mukhopadhyayi upłynęło już prawie sto lat, globalna teoria krzywych płaskich ciągle żywo się rozwija, m.in. za sprawą niedawnych prac matematyka rosyjskiego **Vladimira Arnolda**.



Na zakończenie wspomnimy o pewnym zastosowaniu tego twierdzenia w fizyce. Wyobraźmy sobie ciało stałe S o cylindrycznym kształcie i wypukłym przekroju poprzecznym, znajdujące się na granicy między dwiema cieczami, bez działania siły ciężkości. Ze względu na cylindryczny kształt ciała istotny jest tylko jego przekrój, rozpatrzmy zatem gładką wypukłą figurę płaską F, przeciętą prostą P (odpowiadającą granicy między cieczami). Metodami chemii fizycznej dowodzi się, że ciało jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy oba kąty ostre między prostą P a stycznymi do F, poprowadzonymi w punktach jej przecięcia z P, są równe pewnej wartości α, zależącej tylko od trzech napięć powierzchniowych odpowiadającym trzem powierzchniom styku (ciecz I i II, ciecz I i S, ciecz II i S). To czysto geometryczne zagadnienie zbadali Francuz **Marcel Berger** z Włochem **Eugenio Calabim** i przy użyciu twierdzenia o czterech wierzchołkach udowodnili, że dla takiego ciała istnieją co najmniej cztery położenia równowagi, w tym połowa to położenia stabilne.

Zadania

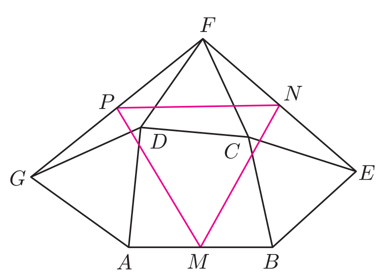
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 707. Oszacować średnią gęstość Słońca, przyjmując, że jego kątowy rozmiar (widziany z Ziemi) wynosi około 0,01 radiana.
Rozwiązanie na str. 24

F 708. Oszacować grubość fotosfery Słońca, rozpatrując równowagę oddziaływań grawitacyjnych i sił wynikających z ciśnienia materii słonecznej. Przyjąć, że fotosfera składa się całkowicie z wodoru atomowego, a jej grubość jest znacznie mniejsza od promienia Słońca. Temperatura na powierzchni fotosfery wynosi około 6000 K.
Rozwiązanie na str. 24

Redaguje Waldemar POMPE

M 1192. Wykazać, że z każdego 9-elementowego podzbioru zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ można wybrać takie dwie liczby a i b, że liczba $a^2 + b^2$ jest liczbą pierwszą.
Rozwiązanie na str. 24



M 1193. Na bokach BC, CD, DA czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne BCE, CDF, DAG leżące po zewnętrznej stronie czworokąta (rysunek). Niech M, N, P będą odpowiednio środkami odcinków AB, EF, FG. Udowodnić, że trójkąt MNP jest równoboczny.
Rozwiązanie na str. 3

M 1194. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S punktów o następującej własności: dla każdego $k = 1, 2, \ldots, 100$ istnieje prosta, która zawiera dokładnie k spośród danych punktów. Wykazać, że zbiór S składa się z co najmniej 2550 punktów.
Rozwiązanie na str. 6