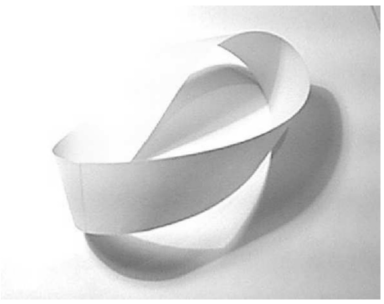
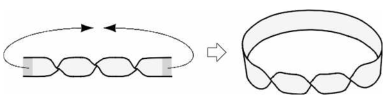
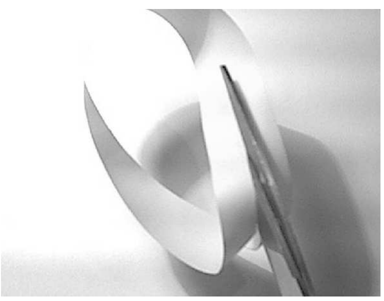
mmm* z wizytą w *Delcie* – ćwiczenia ze wstążką

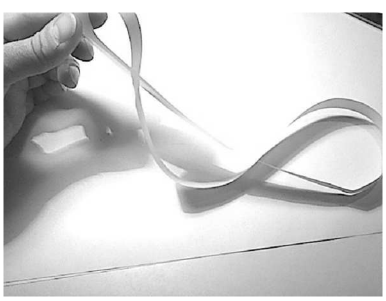


Rys 1



Rys. 2





Rys. 3

Rys. 4

Eksperyment 1. Ile stron ma kartka papieru? Pomaluj dokładnie podłużny pasek papieru. Jeśli tylko nie odwrócisz go przy tym na drugą stronę, po zakończeniu malowania pozostanie z jednej strony biały. To dlatego, że prostokąt jest powierzchnią dwustronną. Sklej teraz wąskie boki nowego paska, tak by otrzymać powierzchnię boczną walca, i powtórz eksperyment z malowaniem, nie przekraczając brzegu powierzchni. I tym razem jedna strona kartki pozostanie biała. Powierzchnia boczna walca też ma dwie strony. Weź jeszcze jeden pasek papieru i przed sklejeniem jeden z brzegów przekręć o 180°. Powstanie powierzchnia nazywana wstęgą Möbiusa (od nazwiska niemieckiego matematyka i astronoma Augusta Ferdynanda Möbiusa, który w roku 1858 opisał jej własności). Znowu pomaluj ją uważnie, tak by nie przekroczyć brzegu. Po zakończeniu pracy sprawdź, czy pasek pozostał gdzieś biały. Okazuje się, że wstęga nie ma „białej strony”, ma tylko jedną – pomalowaną stronę. Mówimy, że wstęga Möbiusa jest **powierzchnią jednostronną**.

Eksperyment 2. Kiedy kartka ma 2 strony? Wykonaj z papieru różne wstęgi skręcone kilka razy i sklejone jak na rysunku 2. Zaczynając z dowolnego miejsca narysuj kreskę dokładnie w połowie szerokości każdej wstęgi. Co zauważyłeś?

Rysując taką linię, zawsze powrócimy do punktu wyjścia, jednak czasem będzie ona przebiegała tylko po jednej stronie papieru, a czasem po obu jego stronach, chociaż w żadnym przypadku nie odrywaliśmy ołówka od papieru ani nie przekraczaliśmy brzegu kartki. Oznacza to, że otrzymane wstęgi czasem są dwustronne, a czasem jednostronne. Zależy to od parzystości liczby skręceń przed sklejeniem paska. Nazwijmy tę liczbę **rzędem wstęgi**. Mamy więc pierwszy wniosek: **Wstęgi rzędów parzystych są dwustronne, a nieparzystych – jednostronne.**

Eksperyment 3. Jak rozpada się kartka papieru? Jeśli przetniemy prostokątną kartkę wzdłuż środkowej linii, rozpadnie się ona na 2 prostokąty. Jeśli powierzchnię walca przetniemy wzdłuż linii poprowadzonej przez środek, rozpadnie się ona na 2 powierzchnie walca. A na co rozpadnie się wstęga Möbiusa przecięta wzdłuż linii środkowej? Niespodzianka, nie rozpadnie się wcale (sprawdź)!

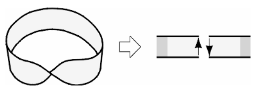
Po rozcięciu wstęga Möbiusa nadal pozostaje w jednym kawałku, ale czy jest to nadal wstęga Möbiusa? A może to wstęga innego rzędu? Sprawdź. A co stanie się, jeśli przetniemy w połowie wstęgi innych rzędów? Które rozpadną się, a które nie? Z obserwacji łatwo wysnuć kolejny wniosek: **Zachowanie wstęgi podczas cięcia zależy od parzystości jej rzędu. Jeśli jest on parzysty – otrzymujemy dwie części, a jeśli nieparzysty – tylko jedną.**

Ale co to są za części? Czy są takie same, jak wyjściowa wstęga? Rozetnij w połowie wstęgę rzędu 4. Tym razem się rozpadła na dwie części. Jakie? Co jeszcze zauważyłeś?

Wstęga rzędu 4 po przecięciu rozpada się co prawda na 2 części, ale nie można ich rozdzielić, bo są zapętlone. Czy zawsze tak jest?

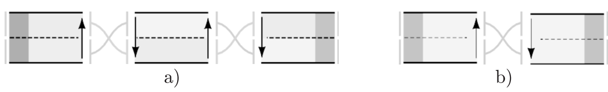
*mmm – magazyn miłośników matematyki; http://www.mmm.uni.wroc.pl

Aby przeanalizować to zjawisko, umówmy się, że skręcenia umieszczamy na przedniej stronie taśmy i zakładamy, że z tyłu tworzy ona jeden prosty kawałek. Ponadto zamiast skręceń będziemy odtąd rysowali przejścia kodowane jak na rysunku 5 (strzałka oznacza, że w tym miejscu należy taśmę obrócić, a potem przykleić do sąsiedniej strzałki zgodnie z zaznaczonym kierunkiem).



Rys. 5

Zauważmy, że gdy mamy parzystą liczbę skręceń (rys. 6a), to, zaczynając np. z lewej strony u góry, po parzystej liczbie przejść kończymy po prawej stronie również na górze, czyli jedna część wstęgi zostanie odcięta od drugiej. W przeciwnym przypadku (rys. 6b) skończymy po prawej stronie na dole i przechodząc tyłem na lewą stronę, nie połączymy się z częścią górną, od której wyszliśmy, tylko przejdziemy do części dolnej, zatem wstęga nie rozpadnie się.

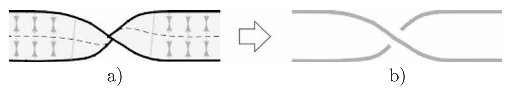


Rys. 6

To, jakiego rodzaju wstęgi powstają po przecięciu danej wstęgi w połowie, również zależy od parzystości jej rzędu. Zacznijmy od przypadku parzystego (rys. 6a). Widzimy, że każde skręcenie podwaja się, a każda z dwóch powstających części dostaje po jednym z tych skręceń. Zamazując w pamięci jedną z części, łatwo zauważymy, że każda nowa część jest wierną kopią pierwotnej. Pozostał przypadek, gdy rząd wyjściowej wstęgi jest nieparzysty (rys. 6b).

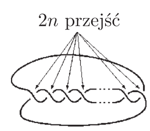
Zauważyliśmy już, że każde skręcenie podwaja się i że wstęga pozostaje w jednym kawałku. Czy to oznacza, że rząd nowej wstęgi jest dwukrotnie większy? Otóż nie! Bo nadal dwa zwoje pętli leżą jeden nad drugim. Jeśli chcemy wygodnie policzyć skręcenia, musimy wstęgę sprowadzić do pozycji ze wszystkimi skręceniami „z przodu". Taka operacja wymaga przekręcenia jednej z części o 180°, a przy tym powstają dwa nowe skręcenia (można to łatwo zaobserwować na przykładzie wstęgi rzędu 1 lub 3). Zatem ze wstęgi rzędu n (dla n nieparzystego) dostajemy wstęgę rzędu $2n + 2$ (czyli ze wstęgi jednostronnej otrzymujemy dwustronną!).

Jeśli rozcinamy wstęgę rzędu zero (powierzchnię boczną walca), otrzymujemy jej dwie niezasupłane kopie. Załóżmy teraz, że rozcinamy wstęgę niezerowego rzędu parzystego. W efekcie otrzymujemy również jej dwie kopie. Zastanówmy się, czy dadzą się one swobodnie rozdzielić, czy będą zasupłane, jak w przypadku rzędu 4. Łatwiej przeanalizować, jeśli na rysunkach „zgnieciemy" paski do linii i zamiast sytuacji z rysunku 7a będziemy rysowali tę z rysunku 7b.

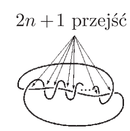


Rys. 7

Wtedy zauważymy, że przy $2n$ skręceniach, dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ obie części będą zasupłane w sposób przedstawiony na rysunku 8. Przy nieparzystej liczbie skręceń wstęga pozostaje co prawda w jednym kawałku, ale wtedy również będzie ciekawie zasupłana sama ze sobą, co przedstawia rysunek 9.



Rys. 8

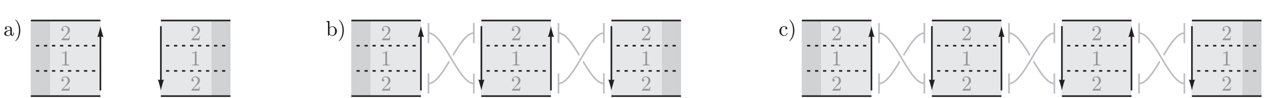


Rys. 9

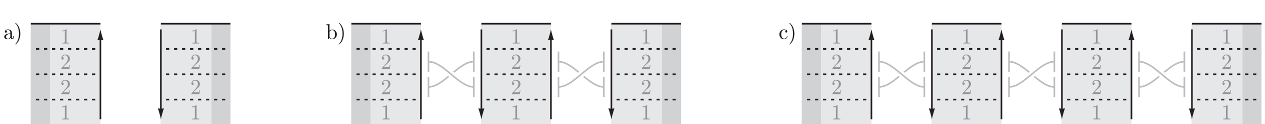
Eksperyment 4. Tnij na potęgę

Wyobraź sobie, że wstęgi różnych rzędów kroimy radełkiem o 2 lub 3 ostrzach rozmieszczonych odpowiednio co 1/3 lub 1/4 szerokości paska papieru. Rodzą się pytania:
Czy wstęga pozostaje w jednym kawałku, czy rozpada się na części? Kiedy tak jest?
A jeśli się rozpada, to na ile części? Czy części te są wstęgami tego samego typu, co wyjściowa?
A jeśli jest ich więcej, to czy są jednakowe?
Czy można je oddzielić, czy są „zasupłane"? A jeśli są zasupłane, to w jaki sposób?

Chociaż po wykonaniu eksperymentu z radełkiem np. o 7 ostrzach i wstęgą o 5 skręceniach otrzymujemy... plątaninę papieru, z której niewiele widać, okazuje się, że odpowiedzi na te pytania nie są takie trudne, bowiem wykonaliśmy już w zasadzie całą pracę. Wystarczy zauważyć, że przy dużej liczbie cięć mogą zajść dwa przypadki: albo odetniemy część w środku (gdy liczba ostrzy jest parzysta – rys. 10), albo takiej części nie będzie (rys.11). W pierwszym przypadku środkowa część jest zawsze bliźniaczo podobna do pierwotnej (widać to po „zmazaniu" w myśli wszystkich innych części). Części inne niż środkowa (niezależnie od parzystości cięcia) możemy rozpatrywać po dwie położone symetrycznie względem środka, którym czasem jest środkowa część, a czasem środkowy rowek. Wtedy stosuje się rozumowanie dla pojedynczego cięcia (po wymazaniu w myśli wszystkich innych części rysunków widzimy sytuację jak na rysunku z cięciem w połowie tyle samo razy zawiniętej wstęgi).



Rys. 10



Rys. 11

Teraz łatwo można przeprowadzić eksperyment myślowy z krojeniem wstęgi radełkiem o k ostrzach rozmieszczonych co $\frac{1}{k+1}$ szerokości wstęgi. Co się wtedy dzieje, np. dla wstęgi o 100 skręceniach i radełka o 101 ostrzach?