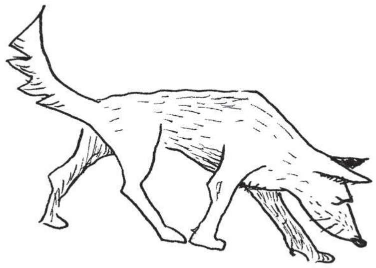


Informatyczny kącik olimpijski (4) – gra na grafie

Dowolne drzewo (tj. graf bez cykli) możemy ukorzenić, wybierając pewien wierzchołek jako „korzeń". W ten sam sposób możemy „ukorzenić" dowolny graf. Niech więc G będzie grafem ukorzenionym. Alicja i Bob będą na przemian usuwać z tego grafu po jednej krawędzi. Po każdym ruchu wszystkie wierzchołki i krawędzie niedostępne z korzenia będą usuwane. Ten, kto nie może wykonać ruchu przegrywa. Kto wygra?

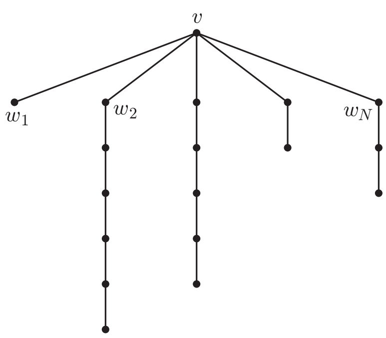
Dojdziemy do rozwiązania krok po kroku. Zacznijmy od prostego grafu – zbioru rozłącznych ścieżek wychodzących z korzenia. W ten sposób nasza gra automatycznie staje się znaną grą NIM, gdzie długości ścieżek odpowiadają wysokościom kolejnych stosów.

Dla przypomnienia – w dwuosobowych, skończonych grach nielosowych o pełnej informacji (np. NIM), w której obaj gracze w danej pozycji mają te same dozwolone ruchy i przegrywa gracz nie mogący wykonać ruchu, każdej pozycji w grze przypisujemy wartość Sprague–Grundy'ego (SG):

- Jeśli z danej pozycji nie można wykonać ruchu (czyli przegrywamy) $SG = 0$,
- W przeciwnym razie SG to najmniejsza nieujemna liczba całkowita, różna od wartości wszystkich pozycji, do których można się ruszyć z bieżącej pozycji.

Wartością SG gry jest wartość SG jej początkowej pozycji.

Przykładowo, początkowa wartość SG gry NIM z jednym stosem to wysokość tego stosu, a z N stosami, gdzie na i-tym stosie jest A_i krążków – $A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_N$ (gdzie $\oplus$ to binarna operacja XOR, czyli „dodawanie bez przeniesienia" w systemie binarnym). Pozycja w grze jest wygrywająca, gdy jej wartość $SG \neq 0$.



W następnym kroku zajmijmy się ukorzenionymi drzewami. Na początek niech korzeń drzewa (v) będzie połączony z tylko jednym wierzchołkiem (w), i niech wartość SG poddrzewa ukorzenionego w w wyniesie $SG(w)$. W takiej rozgrywce dowolny gracz może usunąć krawędź vw, wykonując ruch do pozycji o $SG = 0$. Co więcej, ruch wygrywający w poddrzewie ukorzenionym w w (czyli usuwający wszystko poza krawędzią vw) doprowadza do $SG = 1$. W takim razie $SG(v) = SG(w) + 1$. Jeśli z kolei v ma więcej sąsiadów, to

$$SG(v) = (SG(w_1) + 1) \oplus (SG(w_2) + 1) \oplus \ldots \oplus (SG(w_N) + 1)$$

(jak w grze NIM). Zauważmy, że wartość SG drzewa ma tę samą parzystość, co liczba jego krawędzi.

Kolejny krok będzie mały, ale istotny – niech teraz w grafie istnieje dokładnie jeden cykl A (przechodzący przez korzeń). Wprowadzimy operację łączenia wierzchołków ze zbioru A – zamieniamy je wszystkie na jeden wierzchołek (nazwijmy go w), wszystkie krawędzie prowadzące z innych wierzchołków do A podczepiamy do w, a wszystkie krawędzie w obrębie A stają się pętlami zaczepionymi w w. Kluczowe spostrzeżenie: oryginalny graf G ma tę samą wartość SG, co powstały graf G'. Dlaczego tak jest? Rozważmy grę $G + G'$ (której wartość SG jest równa $SG(G) \oplus SG(G')$). Jeśli pierwszy ruch usunie jedną z krawędzi z A (z G otrzymamy H), to (jak w poprzednim przypadku) możemy obliczyć $SG(H + G')$. H ma o jedną krawędź mniej niż G'. Ale zauważmy, że dla dowolnych nieujemnych a i b, $a \oplus b$ ma tę samą parzystość co $a + b$. Skoro $H + G'$ ma nieparzyście wiele krawędzi, to $SG(H + G')$ jest nieparzyste, a więc niezerowe. Dalej – jeśli pierwszy ruch usuwa krawędź jednego z drzew zawieszonych w wierzchołkach z A (lub w nowym wierzchołku w G'), to przeciwnik usuwa analogiczną krawędź w drugim grafie (G lub G') i otrzymujemy pozycję $H + H'$, gdzie H ma jeden cykl przechodzący przez korzeń, a H' powstaje przez połączenie wierzchołków tego cyklu. A skoro (przez indukcję) $SG(H + H') = 0$, to $SG(G + H') > 0$ (albo $SG(H + G') > 0$). Podobnie rozpatrujemy przypadek, w którym pierwszy gracz usuwa jedną z pętli przy nowym wierzchołku w G'.

Ostatecznie $SG(G + G') = 0$, więc $SG(G) = SG(G')$.

Pozostaje jeszcze przypadek ogólny. Dowód, że połączenie dwóch wierzchołków na jednym cyklu zachowuje wartość SG pozostawiam Czytelnikowi.

Podpowiedź: Rozważmy najmniejszy graf G, dla którego ten postulat nie jest spełniony. Żadne dwa wierzchołki G nie mogą być połączone trzema rozłącznymi ścieżkami, czego dowodzimy przez połączenie tych dwóch wierzchołków.

To zadanie było nieco innego typu niż zadania z poprzednich edycji. Znalazło się tutaj ze względu na szczególnie urokliwe rozwiązanie, które dostarczyło niżej podpisanemu wiele radości (jakkolwiek dopiero po zawodach, na których się pojawiło), w nadziei, że Czytelnik również je doceni.

Filip WOLSKI