δ

Pakowanie prezentów

Wymyślili to tak: prezentem dla rodziców będzie kilka zrobionych lub kupionych wcześniej drobiazgów, wszystkie je włożą do pudełka o kształcie prostopadłościanu, które wypełnią jeszcze kulkami ze starych gazet. Jakich rozmiarów ma być pudełko? Oczywiście, największe, jak się da! Im więcej makulatury tam się zmieści, tym większa będzie frajda przy szukaniu prezencików. Kartonu i ozdobnego papieru mają jeszcze pod dostatkiem, ale kolorowej wstążki po ich „wstążkożernych" pomysłach na pakowanie prezentów dla dziadków zostało już tylko 4 metry. Tasiemka ma być wiązana tradycyjnie (rysunek) i jej długość to jedyne ograniczenie na wielkość pudełka.

– Około 40 centymetrów musi zostać na kokardkę – stwierdziła Zuźka. – Resztę możemy przeznaczyć na obwiązanie prezentu.

– Zapiszmy sobie to wszystko na kartce – dodał Robert. – Jeśli wysokość pudełka oznaczymy przez h, a długość boków podstawy przez a i b, to będziemy potrzebowali $4h + 2a + 2b$ wstążki na samo jego opasanie, czyli na pewno te wymiary muszą spełniać równość $4h + 2a + 2b = 3{,}6\,\mathrm{m}$.

– Tak, i jeszcze chcemy, by objętość, czyli $a \cdot b \cdot h$, była jak największa. Ale nawet nie wiemy, ile ona będzie wynosić. Coś mi się jednak kojarzy z pytaniem o to, który prostokąt o ustalonym obwodzie ma największe pole – zamyśliła się Zuźka.

– Faktycznie, jest to coś podobnego, tylko zamiast dwóch mamy trzy niewiadome. A ten prostokąt o największym polu to kwadrat, tak?

– No, tak. Ale wyobraźmy sobie, że już mamy takie pudełko o największej objętości, które możemy obwiązać naszą wstążką. Czy przypadkiem z tego zadania nie wynika, że jego podstawą musi być kwadrat?

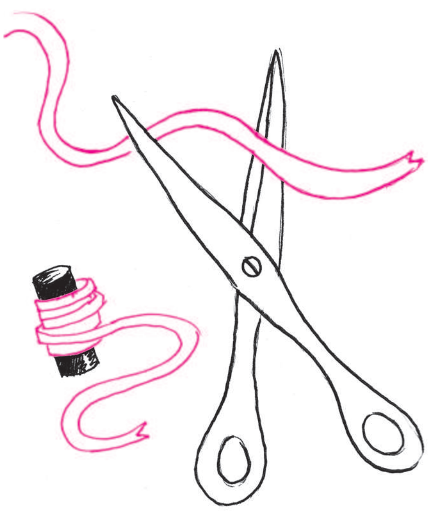
– Hm, jeśli to nie byłby kwadrat...

– To pudełko o podstawie kwadratu o boku długości $(a + b)/2$ miałoby większą objętość! – ucieszyła się siostra. – A wstążki potrzeba tyle samo.

– Świetnie! Zatem o b możemy zapomnieć i wiemy teraz, że $4a + 4h = 3{,}6\,\mathrm{m}$. Objętość prostopadłościanu zależy tylko od a i jest równa $a^2 \cdot (3{,}6\,\mathrm{m} - 4a)/4$. Komputer nam pomoże narysować wykres tej funkcji!

– Oj, braciszku. A może jeszcze trochę się zastanowimy nad tym sami? Czy nie uda się podobnie powiązać a i h?

– Dobrze. Chyba się pośpieszyłem zarówno z tym komputerem, jak i z rezygnacją z b. Ty założyłaś, że mamy jakieś ustalone h i zastanawiałaś się, w jakiej proporcji najlepiej dobrać a i b. A gdybym, na przykład, ustalił b, to jak najlepiej dobrać a i h?



– Wiedziałbyś, że $4h + 2a = 3{,}6\,\mathrm{m} - 2b$ jest stałe i chciałbyś, by $a \cdot h$ było jak największe. No, ale $4h + 2a$ nie jest obwodem prostokąta o bokach a i h, więc nie możemy skorzystać z tego triku z kwadratem...

– Ale, ale... $4h + 2a$ to obwód prostokąta o bokach $2h$ i a. Wiemy, że dla $2h = a$ jego pole równe $2h \cdot a$ jest największe przy ustalonym obwodzie. A skoro tak, to $h \cdot a$ też jest największe w takim przypadku!

– Czyli jeśli a byłoby różne od $2h$, to znów moglibyśmy zwiększyć objętość pudełka przy takiej samej długości wstążki. Zatem nasze idealne pudełko o wysokości h ma w podstawie kwadrat o boku $2h$. Obliczyłeś już jego wymiary?

– Tak. Wychodzi $a = b = 60\,\mathrm{cm}$ i $h = 30\,\mathrm{cm}$ – odpowiedział Robert.

– No to pakujemy – zarządziła Zuźka.

Małą Deltę przygotowali Marek KORDOS i Marcin HAUZER