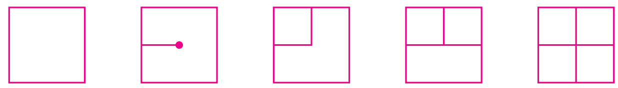
Informatyczny kącik olimpijski (3)

W trzeciej edycji informatycznego kącika olimpijskiego zmierzymy się z następującym zadaniem.

Na każdym polu szachownicy N na M leży jeden z następujących klocków:



Możemy te klocki dowolnie obracać, ale nie możemy zamieniać miejscami. Naszym celem jest takie ich ułożenie, żeby każda para sąsiadujących klocków stykała się albo ścianami „pustymi”, albo tymi, do których dochodzi linia, oraz żeby żadna linia nie kończyła się na krawędzi planszy.

To zadanie znane jest jako gra logiczna Hydraulik, niektórzy z Czytelników mogli się spotkać np. z grą KPlumber. Linie na klockach można interpretować jako rury – nie chcemy, żeby z którejś rury wylewała się woda, a więc nie wolno dopuścić do tego, żeby rura kończąca się na krawędzi klocka nie była połączona z rurą z sąsiedniego klocka. Oryginalny Hydraulik zawiera jeszcze jeden dopuszczalny klocek – linię prostą. Gdybyśmy dopuścili ją również w naszym zadaniu, otrzymalibyśmy, jak się okazuje, problem NP-trudny (czyli prawdopodobnie bez szans na algorytm wielomianowy). Bierze się to stąd, że klocek „prosty” jest ostatnim, którego potrzeba, żeby móc sprowadzić tzw. problem (1,3)-SAT do problemu Hydraulika. Sposób, w jaki można to zrobić, wykracza, niestety, poza ramy tego tekstu.

Jak można spróbować usystematyzować to zadanie? Będziemy mówić, że dwa pola są *połączone*, jeśli sąsiadują, i – przy danym obrocie – z każdego prowadzi rura w kierunku drugiego. Spróbujmy w takim razie sformułować problem trochę inaczej:

• Pole typu 0 – niepołączone z żadnym z sąsiednich pól.

• Pole typu 1 – połączone z dokładnie jednym z sąsiednich pól.

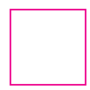
• Pole typu 2 – połączone z dokładnie jednym z pól u góry i na dole, i jednym z pól na lewo i na prawo.

• Pole typu 3 – połączone z trzema sąsiednimi polami.

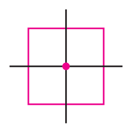
• Pole typu 4 – połączone z wszystkimi sąsiednimi polami.

Nie ma wśród nich brakującego klocka z linią prostą – tam jest połączenie, jednocześnie, z polami górnym i dolnym, lub z lewym i prawym. Z połączenia z jednym polem wynika połączenie z innym polem, w przypadku pozostałych klocków te połączenia są niezależne. Tak (intuicyjnie) można tłumaczyć, dlaczego wprowadzenie klocka prostego utrudnia nasz problem.

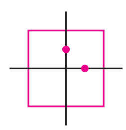
Spróbujemy skonstruować odpowiadający planszy graf, w którym szukać będziemy maksymalnego skojarzenia. Jak taki graf miałby wyglądać? Każdemu polu odpowiadałoby zapewne kilka wierzchołków. Krawędzie łączyłyby tylko wierzchołki z jednego pola lub z sąsiadujących pól. Jeśli dana krawędź pomiędzy polami należałaby do skojarzenia, to znaczyłoby, że te dwa pola są połączone. Jak więc konstruować taki graf?



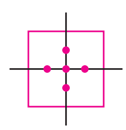
• Pole typu 0 – na tym polu nie ma żadnego wierzchołka.



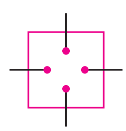
• Pole typu 1 – na tym polu znajdzie się jeden wierzchołek, z którego prowadzą krawędzie we wszystkich czterech kierunkach. Dokładnie jedna będzie należała do maksymalnego skojarzenia – czyli pole będzie połączone z dokładnie jednym sąsiadem.



• Pole typu 2 – na tym polu znajdą się dwa wierzchołki, przy czym z jednego dwie krawędzie będą prowadzić do góry i na dół, a z drugiego – w lewo i w prawo.



• Pole typu 3 – na to pole z kolei będziemy potrzebowali aż 5 wierzchołków – po 1 na każdą jego ścianę, z każdego z nich będzie wychodziła pojedyncza krawędź w kierunku jednej ściany. Ale nie wszystkie z nich mają być skojarzone – a więc potrzebny jest jeszcze jeden wierzchołek, połączony z każdym ze wspomnianych czterech krawędzią.



• Pole typu 4 – na tym polu znajdą się cztery wierzchołki, po jednym na każdą ścianę.

Czasem może się zdarzyć (kiedy sąsiadem wierzchołka jest pole puste lub kiedy leży on na krawędzi), że choć do danej jego ściany prowadzi krawędź, to nie ma ona z czym się połączyć po drugiej stronie. Wtedy tej krawędzi po prostu nie ma. Może to doprowadzić do tego, że któryś z wierzchołków grafu będzie miał stopień 0 – jeśli np. pole typu 4 leży na krawędzi szachownicy, to rozwiązanie nie istnieje. W ogólności, rozwiązanie istnieje tylko wtedy, gdy w grafie skonstruowanym jak powyżej maksymalne skojarzenie jest pełne.

Ostatnim krokiem jest taka obserwacja: utworzony graf jest dwudzielny. Aby to stwierdzić, wystarczy przyjrzeć się jego strukturze. Sprowadziliśmy więc zadanie do problemu znajdowania maksymalnego skojarzenia w grafie dwudzielnym o $O(NM)$ wierzchołkach, co kończy rozwiązanie.

Filip WOLSKI